

แบบฝึกหัดชุดที่ 5

อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันและ อนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

1. จงหา $\frac{dx}{dy}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้

$$(1) \quad y = x^2 + 6x + 5 \quad \left[\frac{1}{2x+6} \right]$$

$$(2) \quad y = x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} \quad \left[\frac{\frac{1}{2}2x^{\frac{1}{2}}}{6x^{\frac{1}{2}}+3} \right]$$

$$(3) \quad y = \sqrt{3x+7} \quad \left[\frac{2\sqrt{3x+7}}{3} \right]$$

$$(4) \quad y = x\sqrt{3x} - \frac{1}{x} \quad \left[\frac{2x^2}{3\sqrt{3x^{\frac{5}{2}}}+2} \right]$$

$$(5) \quad y = \frac{x}{\sqrt{2x}} \quad \left[2\sqrt{2x} \right]$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{(1-2x)^3} \quad \left[\frac{(1-2x)^4}{6} \right]$$

$$(7) \quad x^2 - y^3 = 2xy \quad \left[\frac{2x+3y^2}{2x-2y} \right]$$

$$(8) \quad x = \frac{y}{2x-y^2} \quad \left[\frac{1+2xy}{4x-y^2} \right]$$

$$(9) \quad x^2y + 3xy^3 - x = 3 \quad \left[\frac{x^2+9xy^2}{1-2xy-3y^3} \right]$$

$$(10) \quad x^2y - 5xy^2 + 6 = 0 \quad \left[\frac{x^2-10xy}{5y^2-2xy} \right]$$

$$(11) \quad 3xy = (x^3 + y^2)^{\frac{3}{2}} \quad \left[\frac{x-y\sqrt{x^3+y^2}}{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x^3+y^2}-y} \right]$$

$$(12) \quad 2x^2y - 4y^3 + 1 = 0 \quad \left[\frac{6y^2-x^2}{2xy} \right]$$

$$(13) \quad y = \frac{(9x-2)\sqrt[3]{x^3+8}}{135} \quad \left[\frac{135(x^3+8)^{\frac{2}{3}}}{18x^3-2x^2+72} \right]$$

$$(14) \quad y = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)^{-1} \quad \left[-\frac{\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)^2}{x^2+x+1} \right]$$

$$(15) \quad y = [(7x-x^{-1})^{-2} + 3x^2]^{-1} \quad \left[\frac{[(7x-x^{-1})^{-2} + 3x^2]^2}{2[(7x-x^{-1})^3(7+x^{-2})-3x]} \right]$$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

(1) $f(x) = \sqrt{3x+4}$ จงหา $(f^{-1})'(2)$ [$\frac{4}{3}$]

(2) $f(x) = t^3$ จงหา $(f^{-1})'(8)$ [$\frac{1}{12}$]

(3) $g(u) = \sqrt{4u^3+2}$ จงหา $(g^{-1})'(\sqrt{2})$ [ไม่มีอนุพันธ์]

(4) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ จงหา $(h^{-1})'(\frac{1}{2})$ [$\pm \frac{16}{5}$]

(5) $f(x) = \frac{x}{5x-3}$ จงหา $(f^{-1})'(1)$ [$-\frac{4}{3}$]

(6) $s(t) = \frac{t^2}{1-2t}$ จงหา $(s^{-1})'(2)$ [$-\frac{9}{4}$]

(7) $f(x) = \frac{x^2}{4}, x > 0$ จงหา $(f^{-1})'(4)$ [$\frac{1}{2}$]

(8) $g(x) = x^3 - 2x + 1, x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ จงหา $(f^{-1})'(0)$ [1]

(9) $g(x) = x^3 - 2x + 1, x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ จงหา $(f^{-1})'(5)$ [$\frac{1}{10}$]

3. กำหนดให้สมการ $x^3 + xy^3 = 9$ มี x เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ y จงหา $\frac{dx}{dy}$ [$\frac{-3xy^2}{3x^2 + y^3}$]

4. กำหนดให้สมการ $x^3 - xy^2 + y = 1$ มี x เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ y จงหา $\frac{dx}{dy}$ [$\frac{2xy-1}{3x^2-y^2}$]

5. จงหา $\frac{dy}{dx}$ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยสมการอิงตัวแปรเสริมในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x = t^2, y = t^3$ [$\frac{3}{2}t$]

(2) $x = 2t^3 - 1, y = t^2 + t$ [$\frac{2t+1}{6t^2}$]

(3) $x = t^3, y = 2t - 3$ [$\frac{2}{3t^2}$]

(4) $x = 4t^2 - 2t + 1, y = \sqrt{t}$ [$\frac{1}{4\sqrt{t}(4t-1)}$]

(5) $x = \sqrt{v}, y = v^2 - 3v - 1$ [$2(2v-3)\sqrt{v}$]

(6) $x = (3m+7)^2, y = m^2 + 2m$ [$\frac{m+1}{9m+21}$]

(7) $x = 4k^{\frac{3}{2}}, y = k^{\frac{1}{2}} - 3$ [$\frac{1}{12k}$]

(8) $x = \frac{t+1}{t-1}, y = \frac{t-1}{t+1}$ [$-\frac{1}{x^2}$]

(9) $x = \sec t, y = \tan t$ [$\operatorname{cosec} t$]

(10) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ [$\frac{\sin t}{1 - \cos t}$]

(11) $x = t \sin t, y = t \cos t$ [$\frac{\cos t - t \sin t}{\sin t + t \cos t}$]

6. จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ จากฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริมในแต่ละข้อต่อไปนี้

- (1) $x = t^2, y = t^3$ $[\frac{3}{4t}]$
- (2) $x = \sqrt{t}, y = t^2 + 3t$ $[12t + 6]$
- (3) $x = 2t + 1, y = \sqrt{t-3}$ $[-\frac{1}{16(t-3)^{\frac{3}{2}}}]$
- (4) $x = 2t - t^2, y = 5t$ $[\frac{1}{1-t}]$
- (5) $x = 2t^{\frac{3}{2}}, y = \sqrt{t} + 5$ $[-\frac{1}{18t^{\frac{5}{2}}}]$
- (6) $x = t^2, y = \sqrt{t-1}$ $[\frac{1-2t}{t^3(t-1)^{\frac{3}{2}}}]$
- (7) $x = t, y = \sqrt{t}$ $[-\frac{1}{4t^{\frac{3}{2}}}]$
- (8) $x = -\sqrt{t+2}, t = \sqrt{3t}$ $[-\frac{3}{t\sqrt{3t}}]$
- (9) $x = \frac{1}{t}, y = -2 + \ln t$ $[t^2]$
- (10) $x = \cos t, y = 1 + \sin t$ $[-\operatorname{cosec}^2 t]$
- (11) $x = 2\cos t + \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t$ $[-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}\frac{3t}{2}\sec^3\frac{t}{2}]$

7. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ณ จุดที่สอดคล้องกับค่าตัวแปรเสริมที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

- (1) $x = 5 - t, y = 5t^2 - 7; t = -1$ $[10]$
- (2) $x = \sqrt{t}, y = 2t + 4; t = 9$ $[12]$
- (3) $x = \cos t, y = \sin t; t = \frac{3\pi}{4}$ $[1]$
- (4) $x = 4\cos 2\pi s, y = 3\sin 2\pi s; s = -\frac{1}{4}$ $[0]$
- (5) $x = t^5 + \sin 2\pi t, y = t + e^t; t = 1$ $[\frac{1+e}{5+2\pi}]$
- (6) $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, y = \cos t; t = \frac{\pi}{6}$ $[-\sqrt{3}]$
- (7) $x = t^2 - 1, y = 2t + 3; t = 1$ $[1]$
- (8) $x = t^3, y = t^2; t = -2$ $[-\frac{1}{3}]$
- (9) $x = 4\sin^2 t - 3, y = 2\cos t; t = \frac{\pi}{3}$ $[-\frac{1}{2}]$
- (10) $x = e^{-t}, y = 1 + e^t; t = \ln 2$ $[-\frac{1}{4}]$

$$(11) \quad x = t^3 - 2t, \quad y = \sqrt{t} - 1; \quad t = \frac{\pi}{3} \quad \left[\frac{1}{20} \right]$$

$$(12) \quad x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t; \quad t = -\frac{\pi}{4} \quad \left[-\frac{1}{2} \right]$$

$$(13) \quad x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t; \quad t = \frac{\pi}{3} \quad \left[\sqrt{3} \right]$$

$$(14) \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t; \quad t = 1 \quad \left[-1 \right]$$

$$(15) \quad x = e \cos^4 t, \quad y = e \sin^4 t; \quad t = \frac{\pi}{4} \quad \left[-1 \right]$$

$$(16) \quad x = e^{-t} \cos 2t, \quad y = e^{-2t} \sin 2t; \quad t = 0 \quad \left[-2 \right]$$

8. จงหา $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ณ จุดที่สอดคล้องกับค่าตัวแปรเสริมที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$(1) \quad x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{t^3}{3}; \quad t = 2 \quad \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$(2) \quad x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4; \quad t = 1 \quad \left[4 \right]$$

$$(3) \quad x = \pi t - \pi \sin t, \quad y = \pi - \cos t; \quad t = \frac{\pi}{4} \quad \left[-\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\pi} \right]$$

$$(4) \quad x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t; \quad t = 0 \quad \left[2 \right]$$

$$(5) \quad x = 4 \sin t, \quad y = 2 \cos t; \quad t = \frac{\pi}{4} \quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

$$(6) \quad x = t, \quad y = \sqrt{t}; \quad t = \frac{1}{4} \quad \left[-2 \right]$$

$$(7) \quad x = \sec 2t - 1, \quad y = \tan t; \quad t = -\frac{\pi}{4} \quad \left[\frac{1}{4} \right]$$

$$(8) \quad x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}; \quad t = 3 \quad \left[-\frac{1}{3} \right]$$

$$(9) \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t; \quad t = 1 \quad \left[1 \right]$$

$$(10) \quad x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t; \quad t = \frac{\pi}{3} \quad \left[-4 \right]$$

$$(11) \quad x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t; \quad t = \frac{\pi}{2} \quad \left[-1 \right]$$

$$(12) \quad x = 1 - t^2, \quad y = t - t^3; \quad t = -1 \quad \left[\frac{14}{27} \right]$$