แบบฝึกหัดชุดที่ 6
การประยุกต์ของอนุพันธ์ (1)

1. จงหาสมการเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนด

(1) $y = x^2 + 1;\ (2,5)$ $[\ y = 4x - 3\ ]$

(2) $y = 4 - x^2;\ (-1,3)$ $[\ y = 2x + 5\ ]$

(3) $y = \sqrt{x};\ (1,1)$ $[\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ ]$

(4) $y = \sqrt{2}\cos x;\ (\frac{\pi}{4},1)$ $[\ y = -x + \frac{\pi}{4} + 1\ ]$

(5) $y = 4\cot x - 2\cos x;\ (\frac{\pi}{2},2)$ $[\ y = -x + \frac{\pi}{2} + 2\ ]$

(6) $x\sin 2y = y\cos 2x;\ (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ $[\ y = 2x\ ]$

(7) $x^2y + y^2 = 4;\ (-2,0)$ $[\ y = -2x - 4\ ]$

(8) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4;\ (2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ $[\ y = -x + 4\sqrt{2}\ ]$

(9) $x = \frac{1}{2}t^3 - 6t,\ y = \frac{1}{2}t^2;\ (8,8)$ $[\ y = \frac{2}{9}x + \frac{56}{9}\ ]$

(10) $x = 2t - 2\sin t,\ y = 2 - 2\cos t;\ (\pi - 2,2)$ $[\ y = x + 4 - \pi\ ]$

2. จงหาสมการเส้นปกติ (เส้นตั้งฉากของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง) ณ จุดที่กำหนด

(1) $y = \sqrt{x+1};\ (3,2)$ $[\ y = -4x + 8\ ]$

(2) $y = x^3 - 7x;\ (2,-6)$ $[\ x + 5y + 28 = 0\ ]$

(3) $y = \sqrt{25 - x^2};\ (-3,4)$ $[\ 4x + 3y = 0\ ]$

(4) $x^2y^2 = 9;\ (-1,3)$ $[\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}\ ]$

(5) $x^2 + xy - y^2 = 1;\ (2,3)$ $[\ y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}\ ]$

(6) $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0;\ (-2,1)$ $[\ y = x + 3\ ]$

(7) $y = 1 + \cos x;\ (\frac{\pi}{2},1)$ $[\ y = x + \frac{\pi}{2} + 1\ ]$

(8) $y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x;\ (\frac{\pi}{4},4)$ $[\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{16} + 4\ ]$

(9) $x = 2\cos t,\ y = 6\sin t;\ (\sqrt{2},3\sqrt{2})$ $[\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\sqrt{2}\ ]$

(10) $x = 1 + 3\sinh t,\ y = 2\cosh t;\ (1,2)$ $[\ y = 2\ ]$

3. จงหาจุดที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $y = x^4 - 2x^2 + 2$; ขนานกับแกน X $[\ (-1,1),(0,2),(1,1)\ ]$

(2) $y = 3x^2 - 2x - 4$; ตั้งฉากกับเส้นตรง $2x - 3y + 7 = 0$ $[\ (\frac{1}{12},-\frac{597}{144})\ ]$

(3) $y = x^2 + 5$; ขนานกับเส้นตรง $12x - y - 17 = 0$ *[(2,13), (-2,-3)]*

(4) $xy - 1 = 0$; ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ *[(1,1), (-1,-1)]*

(5) $x + y^2 - 1 = 0$; ขนานกับเส้นตรง $y = -\frac{x}{2}$ *[(0,1)]*

(6) $x = \sec t,\ y = \tan t$; ขนานกับเส้นตรง $x = \sqrt{2t} + 1,\ y = 2t + 1$ *[$(\sqrt{2},1)$]*

(7) $2x + xy - y - 3 = 0$; ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x + 2$ *[(0,-3), (2,-1)]*

(8) $x^2 - xy + y^2 = 27$; ตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \sqrt{3}$ *[(3,60), (-3,-6)]*

(9) $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$; ขนานกับเส้นตรง $x + y - 1 = 0$ *[$(\sqrt{2},\sqrt{2})$]*

(10) $y = x^3 - 6$; ขนานกับเส้นตรง $y = 12x - 1$ *[(2,2), (-2,-4)]*

4. จงหาความชันของเส้นสัมผัส (m_T) และเส้นปกติ (m_N) ของเส้นโค้ง $y = \sqrt{x+1}$ ที่ $x = 3$ *[$m_T = \frac{1}{4}, m_N = -4$]*

5. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่ $x = -2$ *[$4x + y + 4 = 0$]*

6. จงหาสมการของเส้นปกติของเส้นโค้ง $f(x) = x^3 - 7x$ ที่จุด $(2,-6)$ *[$x + 5y + 28 = 0$]*

7. จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นปกติของเส้นโค้ง $y = 5x\sqrt{4-x}$ ที่จุด $(3,15)$

[เส้นสัมผัส : $5x + 2y - 45 = 0$ เส้นปกติ : $2x - 5y + 69 = 0$]

8. จงหาสมการของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $9x^2 + 16y^2 = 52$ ที่ขนานกับเส้นตรง $9x - 8y - 1 = 0$

[$9x - 9y - 26 = 0$ และ $9x - 8y + 26 = 0$]

9. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y^4 = y^2 - x^2$ ณ จุด $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ *[$\sqrt{3x} - y - \frac{1}{4} = 0$]*

10. จงหาสมการเส้นปกติของเส้นโค้ง $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ ณ จุด $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8})$

[$88\sqrt{3x} - 8y + 1 - 3\sqrt{3} = 0$]

11. เส้นโค้ง $y = Ax^2 + Bx + C$ ผ่านจุด $(1,3)$ และสัมผัสเส้นตรง $4x + y = 8$ ที่จุด $(2, 0)$ จงหาค่าของ A, B และ C *[$A = -1, B = 0, C = 4$]*

12. จงหาสมการของเส้นตั้งฉากเส้นโค้ง $xy + 2x - y = 0$ และขนานเส้นตรง $x + y = 0$ *[$x + y + 1 = 0$]*

13. จงหาค่า x ทั้งหมดที่เส้นสัมผัส $y = 3x - \tan x$ ขนานกับเส้นตรง $x - y + 2 = 0$ *[$\frac{k\pi}{4}, k \in I$]*

14. จงหาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $xy^2 = \sin(x + 2y)$ ณ จุดกำเนิด *[$y = -\frac{1}{2}x$]*

15. จงหา dy เมื่อกำหนดฟังก์ชันโดยสมการดังนี้

(1) $y = 2x^3 + x^2 - 3$ *[$(6x^2 + 2x)dx$]*

(2) $y = (2x - 1)(x^3 - x)$ *[$(8x^3 - 3x^2 - 4x + 1)dx$]*

(3) $y = \frac{x^3 + 7x}{4x - 3}$ *[$\frac{8x^3 - 9x^2 - 21}{(4x - 3)^2}dx$]*

(4) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 2}$ *[$\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 2}}dx$]*

(5) $y=\dfrac{2}{(3x-5)^7}$ $\left[\dfrac{-42}{(3x-5)^8}dx\right]$

(6) $2x^2-y^3+y=3$ $\left[\dfrac{4x}{3y^2-1}dx\right]$

(7) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$ $\left[-x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}dx\right]$

(8) $(2x-1)(y^3-x)=1$ $\left[\dfrac{4x^2-4x-1}{3y^2(2x-1)^2}dx\right]$

(9) $y=\cos^2 2x+\sin 3x$ $[(-2\sin 4x+3\cos 3x)dx]$

(10) $y=e^{3x}+\sin^{-1}2x$ $\left[\left(3e^{3x}+\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx\right]$

(11) $y=e^x\cos\pi x$ $[e^x(\cos\pi x-\pi\sin\pi x)dx]$

(12) $\cos x^2+2^y=e^x$ $\left[\dfrac{(e^x+2x\sin x^2)dx}{2^y\ln 2}dx\right]$

(13) $\ln|y|+\cot 2^x=\sin(\cos x)$ $[y[2^x\ln 2\,\mathrm{cosec}^2(2^x)-\sin x\cos(\cos x)]dx]$

16. ถ้า $y=x^2-x+5$ จงเปรียบเทียบค่า Δy กับค่า dy เมื่อ

(1) $x=2$ และ $dx=\Delta x=0.5$ $[\Delta y=1.75,\ dy=1.5]$

(2) $x=2$ และ $dx=\Delta x=0.2$ $[\Delta y=0.64,\ dy=0.6]$

(3) $x=2$ และ $dx=\Delta x=0.1$ $[\Delta y=0.31,\ dy=0.3]$

(4) $x=2$ และ $dx=\Delta x=0.01$ $[\Delta y=0.0301,\ dy=0.03]$

17. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ

(1) $\sqrt{50}$ [7.0714]

(2) $\sqrt{35.5}$ [5.9583]

(3) $\sqrt[3]{28}$ [3.037]

(4) $\sqrt[4]{79.4}$ [2.9852]

(5) $\sqrt[3]{-8.25}$ [-2.020]

(6) $\cot 46^\circ$ [0.966]

(7) $(8.01)^{\frac{4}{3}}+(8.01)^2-\dfrac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$ [79.687]

(8) $\dfrac{\sqrt{80.9}-1}{(80.9)^{\frac{4}{3}}}$ [0.0228]

(9) $\cos 31^\circ$ [0.857]

(10) $\sin 59^\circ$ [0.857]

(11) $\left[(9.02)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{1}{9.02}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-26$ [1.423]

18. แผ่นโลหะกลมได้รับความร้อนขยายตัวจากรัศมี 5 นิ้วไปเป็น 5.06 นิ้ว จงหาพื้นที่ที่เพิ่มขึ้นโดยประมาณ *[1.88 ตารางนิ้ว]*

19. แผ่นทองแดงกลมแผ่นหนึ่งขยายตัวเมื่อได้รับความร้อน โดยมีรัศมีเพิ่มขึ้นจาก 12.5 เซนติเมตร เป็น 12.65 เซนติเมตร จงประมาณค่าของพื้นที่ที่เพิ่มขึ้น *[11.79 ตารางเซนติเมตร]*

20. ก้อนหิมะรูปทรงกลมรัศมี 10 เซนติเมตร ละลายไปจนรัศมีเป็น 9.8 เซนติเมตร จงหาค่าประมาณของปริมาตรและพื้นที่ผิวที่ลดลง *[ปริมาตรที่เปลี่ยนไป $80\pi \approx 251.327$ ลูกบาศก์เซนติเมตร และพื้นที่ผิวที่เปลี่ยนไป $16\pi \approx 50.265$ ตารางเซนติเมตร]*

21. ต้องการทาสีทรงกลมซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 5 นิ้ว โดยให้สีหนา $\frac{1}{8}$ นิ้ว จะต้องใช้สีเป็นปริมาตรเท่าใด (โดยประมาณ) *[9.817 ลูกบาศก์นิ้ว]*

22. ท่อโลหะทรงกระบอกกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 4 นิ้ว ยาว 6 นิ้ว หนา 0.07 นิ้ว จงหาปริมาตรโดยประมาณของโลหะที่ทำท่อ *[5.2779 ลูกบาศก์นิ้ว]*

23. สมมติว่าโลกกลมและมีรัศมี 4000 ไมล์ ถ้าเอาเชือกมาพันรอบเส้นศูนย์สูตรโดยให้แต่ละจุดของเชือกอยู่เหนือพื้น 2 ฟุต จงหาว่าจะต้องใช้เชือกยาวมากกว่าความยาวของเส้นศูนย์สูตรเท่าใด (1 ไมล์ = 5280 ฟุต) *[12.566 ฟุต]*

24. จงใช้ทฤษฎีบทของโรลหาช่วงของค่าราก (root) ของสมการต่อไปนี้

(1) $3x^2 - 24x + 40 = 0$ *[(2, 3) และ (5, 6)]*

(2) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$ *[(-2, -1), (0, 1) และ (3, 4)]*

(3) $2x^5 + 5x^4 + 1 = 0$ *[(-3, -2)]*

(4) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ *[(-2, -1) และ (1, 2)]*

25. จงหาจุด z ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทค่ากลางของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3;\ [-1, 3]$ *[$z = 1$]*

(2) $g(x) = x^2 - x - 2;\ [-1, 2]$ *[$z = \frac{1}{2}$]*

(3) $h(x) = x^3 - 9x + 1;\ [-3, 3]$ *[$z = \sqrt{3}$]*

(4) $p(x) = 2x^3 - 3x^2;\ [0, \frac{3}{2}]$ *[$z = 1$]*

(5) $f(x) = x^2 + 2x;\ [-2, 2]$ *[$z = 0$]*

(6) $f(x) = x^2 + 3x - 1;\ [-3, 1]$ *[$z = -1$]*

(7) $g(x) = x^3;\ [-1, 1]$ *[$z = \frac{1}{\sqrt{3}}$]*

(8) $g(x) = \frac{x+1}{x-1};\ [0, 4]$ *[ไม่สามารถหา z ได้ เพราะ $g(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$]*

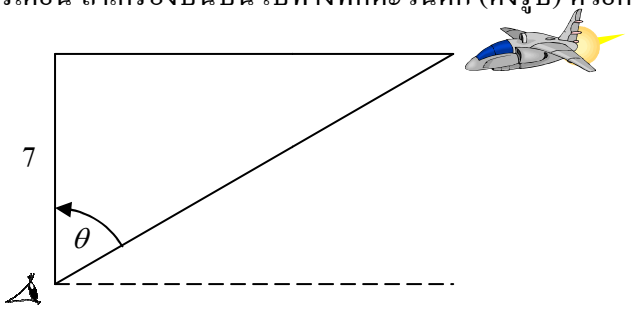
(9) $h(x) = x^{\frac{2}{3}};\ [-1, 1]$ *[ไม่สามารถหา z ได้ เพราะไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$]*

(10) $h(x)=x^{\frac{2}{3}};\ [0,2]$ *[$z=\frac{16}{27}$]*

(11) $p(x)=x+\frac{1}{x};\ [-1,\frac{1}{2}]$ *[ไม่สามารถหา z ได้ เพราะ p(x) ไม่ต่อเนื่องที่ x = 0]*

(12) $p(x)=x+\frac{1}{x};\ [1,2]$ *[$z=\sqrt{2}$]*

26. เด็กคนหนึ่งยืนมองเครื่องบินซึ่งบินอยู่สูง 7 กิโลเมตร จากพื้นดิน มุมที่มองเครื่องบินวัดจากเส้นแนวดิ่งเป็น θ เรเดียน ถ้าเครื่องบินบินไปทางทิศตะวันตก (ดังรูป) ด้วยความเร็ว 10 กิโลเมตรต่อวินาที จงหา $\frac{d\theta}{dt}$



[$-\frac{10}{7}\cos^2\theta$]

27. บอลลูนรูปทรงกลมแฟบลง โดยรัศมีลดลงด้วยอัตราคงที่ 15 ชั่วโมงต่อนาที จงหาว่าอากาศออกจากบอลลูนด้วยอัตราเท่าใด ขณะที่รัศมีเท่ากับ 9 เซนติเมตร *[4860π ชั่วโมงต่อวินาที]*

28. ถังน้ำรูปกรวยกลมรัศมี 10 เซนติเมตร และสูง 24 เซนติเมตร ซึ่งจุดยอดอยู่ด้านล่าง ถ้าน้ำไหลเข้าถังด้วยอัตรา 20 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่าความสูงของน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด ขณะที่น้ำสูง 16 เซนติเมตร *[$\frac{9}{20\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที]*

29. ดวงไฟดวงหนึ่งอยู่บนเสาสูง 28 เมตร ปล่อยวัตถุที่ระดับความสูงเดียวกับดวงไฟ และอยู่ห่างดวงไฟ 7 เมตร ให้ตกลงมาโดยมีฟังก์ชันตำแหน่งเป็น $s=4.9t^2$ เงาของวัตถุจะเคลื่อนที่บนพื้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะที่เวลาผ่านไป 1 วินาที *[80 เมตรต่อวินาที]*

30. อนุภาคเคลื่อนที่อยู่บนเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\frac{xy^3}{1+y^2}=\frac{8}{5}$ สมมติว่าพิกัด x เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 6 หน่วยต่อวินาที ขณะที่อนุภาคอยู่ที่จุด (1, 2) จงหาว่าพิกัด y จะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเท่าใดที่จุด (1, 2) และหาว่าขณะนั้นอนุภาคกำลังขึ้นข้างบนหรือตกลงข้างล่าง *[$-\frac{60}{7}$ หน่วยต่อวินาที และกำลังตกลงข้างล่าง]*

31. ถังเก็บน้ำรูปกรวยกลมสูง 10 เมตร รัศมีที่ปากกรวย 5 เมตร ปล่อยให้น้ำไหลออกที่ก้นถังด้วยอัตรา $0.08\sqrt{h}$ ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที โดยให้ h เป็นความสูงของน้ำในกรวย ขณะเวลา t ใดๆ และที่ปากถังปล่อยให้น้ำไหลเข้าด้วยอัตราคงที่ c ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ถ้าความสูงของน้ำกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.02 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที ขณะที่ความสูงเป็น $\frac{25}{4}$ เมตร จงหาค่า c *[0.813]*

32. บอลลูนลูกหนึ่งลอยขึ้นไปตรงๆ จากจุด A บนพื้นด้วยอัตรา 5 เมตรต่อวินาที จุด B บนพื้นอยู่ในระดับเดียวกับจุด A และห่างจากจุด A 20 เมตร เมื่อบอลลูนอยู่ห่างจากจุด A 15 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางระหว่างบอลลูนกับจุด B เป็นเท่าใด *[3 เมตรต่อวินาที]*