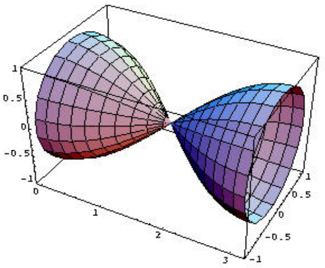


บทที่ 4

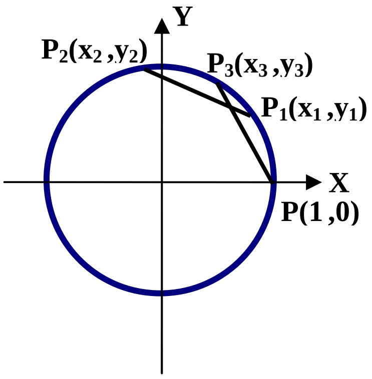
ตรีโกณมิติและการประยุกต์

หัวข้อ

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงและมุม
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมสองเท่า
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมสามเท่า
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมครึ่งเท่า
5. ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติและผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
7. เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ
8. กฎของโคไซน์และไซน์
9. การหาระยะทางและความสูง

4.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม โดยจะศึกษาว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของสองจำนวนนั้นจะเป็นเท่าใด และผลที่ได้จะนำไปใช้ประโยชน์อะไรได้บ้าง สิ่งแรกที่จะพิจารณาคือค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน หรือมุมสองมุม นั่นคือพิจารณาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อ α , β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ



บนวงกลมหนึ่งหน่วยให้ส่วนโค้ง PP_1 ยาว β หน่วย และส่วน PP_2 ยาว α หน่วย

ดังนั้นส่วนโค้ง P_1 , P_2 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย ให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับ PP_2

ดังนั้นส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย ให้โคออร์ดิเนตของจุด P_1 , P_2 , P_3 เป็น (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) และ (x_3 , y_3) ตามลำดับ ดังรูป

เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับคอร์ด P_1P_2 ดังนั้นคอร์ด PP_3 ยาวเท่ากับ P_1P_2

นั่นคือ $$PP_3^2 = P_1P_2^2$$

$$(x_3 - 1)^2 + (y_3 - 0)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2$$

$$-2x_3 + 2 = -2x_2x_1 - 2y_2y_1 + 2$$

$$x_3 = x_2x_1 + y_2y_1 \qquad ❶$$

เนื่องจากจุด (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) และ (x_3 , y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งยาว β, α และ $\alpha - \beta$ หน่วย ตามลำดับ

จะได้ $x_1 = \cos\beta$, $y_1 = \sin\beta$

$x_2 = \cos\alpha$, $y_2 = \sin\alpha$

$x_3 = \cos(\alpha - \beta)$

จากสมการ ❶ จะได้

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 4.1

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้ แล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของ $\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta)$ ในรูปของ $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ และ $\cos\beta$ ได้
2. บอกค่าของ $\tan(\alpha \pm \beta)$ ในรูปของ $\tan\alpha$ และ $\tan\beta$ ได้
3. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุม โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta)$, $\tan(\alpha \pm \beta)$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหา $\cos(\alpha - \beta)$ หรือโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม ที่กล่าวถึงก่อน เพราะหาค่าได้ง่าย และสามารถนำไปใช้ในการหาฟังก์ชันที่สำคัญอื่น ๆ คือ $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta))\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ในการหา $\sin(\alpha + \beta)$ อาจทำได้โดยการพิสูจน์ว่า $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$ เสียก่อนดังนี้

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$

$$= \sin\alpha$$

ดังนั้น

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

จาก $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ ถ้าให้ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ จะได้ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

นั่นคือ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$$

เนื่องจาก $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$

$$\begin{aligned}&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

เนื่องจาก $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))$

$$= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

ดังนั้น

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

สรุปสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือของมุม สามารถนำไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาค่า cos75°

วิธีทำ จาก 75° = 45° + 30° ดังนั้น

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

วิธีทำ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า sin(7π/2)

วิธีทำ $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

ตัวอย่าง 4 จงหาค่า sin80°cos20° - cos80°sin20°

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

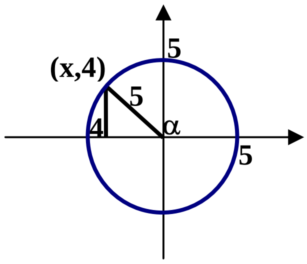
ดังนั้น $\sin80°\cos20° - \cos80°\sin20° = \sin(80° - 20°)$

$= \sin60°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง 5 ถ้ากำหนดให้ $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\pi$ และ $\sin\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$



$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\pi$

รูป **I**

<u>วิธีทำ</u> จาก $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\pi$

กำหนดให้ $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}=\dfrac{y}{r}$ โดย y = 4 , r =5 จากรูปI จะเห็นว่า (x ,4) คือจุดซึ่งอยู่บนวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ และอยู่ในจตุภาค 2 ดังนั้น

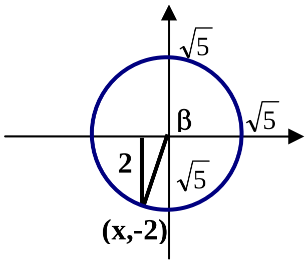
$x^2+y^2=25$, $x<0$

$x^2=9$

$x=-3$

จากที่กล่าวมาจะได้ $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-3}{5}$

จาก $\sin\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$



$\sin\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$

รูป **II**

กำหนดให้ $\sin\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}=\dfrac{y}{r}$ โดย y = -2 และ r = $\sqrt{5}$ จากรูป II จะเห็นว่า (x,-2) คือจุดซึ่งอยู่บนวงกลม $x^2 + y^2 = 5$ และอยู่ในจตุภาค 3 ดังนั้น

$x^2+(-2)^2=5$, $x<0$

$x^2=5-4=1$

$x=-1$

จากที่กล่าวมาจะได้ $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

ดังนั้น $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=-\dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

ดังนั้น $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)+\left(-\dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$

ตัวอย่าง 6 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha\cot\beta + 1$

<u>วิธีทำ</u> $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + 1$$

$$= \cot\alpha\cot\beta + 1$$

กิจกรรม 1

1 จงหาค่าของ

1) $\cos 15°$

2) $\cos\frac{7\pi}{12}$

3) $\sin 15°$

4) $\sin 75°$

5) $\cos 165°$

6) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

7) $\cos 70°\cos 20° - \sin 70°\sin 20°$

8) $\sin 160°\cos 40° - \cos 160°\sin 40°$

9) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

10) $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

2. จงหาค่าของ sin(α+β) , cos(α+β) ,sin(α+β) ,cos(α - β) เมื่อกำหนด

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ และ $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$ และ $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

3. จงพิสูจน์เอกลักษณ์

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = 1 + \cot\alpha\tan\beta$

2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$

จากเอกลักษณ์ของ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ และการพิสูจน์เอกลักษณ์ของ sin(α + β) และ cos(α + β) จะสามารถหาค่าของ tan(α+β) ได้ดังนี้

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

(เมื่อ $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$)

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

ดังนั้น

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

และในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่า tan 15°

วิธีทำ เนื่องจาก 15° = 45° - 30°

$\tan 15° = \tan(45° - 30°)$

$$= \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\approx 0.2679$$

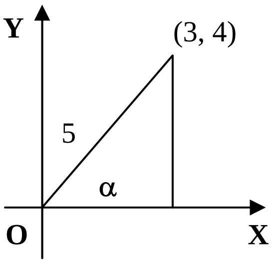
ตัวอย่าง 8 กำหนด α และ β เป็นมุมในจตุภาคที่ 1 ซึ่ง

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$ และ $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ จงหา $\tan(\alpha+\beta)$ และ $\tan(\alpha-\beta)$

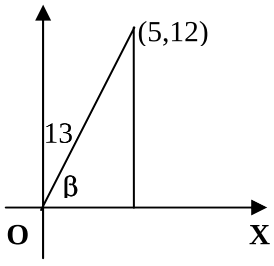
วิธีทำ เนื่องจาก α และ β เป็นมุมในจตุภาคที่ 1 และ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ และ

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$ จะได้ว่าจุด (3,4) อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุม α และ

(5,12) อยู่บนด้านสิ้นสุดของมุม β



รูป I



รูป II

จากรูป **I** จะได้ว่า $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ และ $\tan\alpha = \frac{4}{3}$

จากรูป **II** จะได้ว่า $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$ และ $\tan\beta = \frac{12}{5}$

จะได้ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{(4/3)+(12/5)}{1-(4/3)(12/5)}$$

$$= \left(\frac{56}{15}\right)\left(-\frac{5}{11}\right) = -\frac{56}{33}$$

และ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{(4/3)-(12/5)}{1+(4/3)(12/5)}$$

$$= \left(-\frac{16}{15}\right)\left(\frac{5}{21}\right) = -\frac{16}{63}$$

ตัวอย่าง 9 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

<u>วิธีทำ</u> $\tan(\theta+\pi) = \frac{\tan\theta + \tan\pi}{1-\tan\theta\tan\pi}$

$$= \frac{\tan\theta + 0}{1-\tan\theta\cdot 0}$$

$$= \tan\theta$$

กิจกรรม 2

1. จงหาค่าของ
   1) $\tan 75^\circ$
   2) $\cot 255^\circ$
   3) $\tan 195^\circ$
   4) $\tan\frac{19\pi}{12}$
   5) $\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$
   6) $\frac{\tan 220^\circ - \tan 40^\circ}{1+\tan 220^\circ\tan 40^\circ}$
   7) $\frac{\cot 230^\circ + \tan 20^\circ}{1+\cot 130^\circ\cot 70^\circ}$
   8) $\tan 15^\circ + \tan 30^\circ + \tan 15^\circ\tan 30^\circ$

2. กำหนด α และ β เป็นมุมในจตุภาคที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ซึ่ง $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ และ $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ จงหาค่าของ
   1) $\tan(\alpha+\beta)$
   2) $\tan(\alpha-\beta)$

3. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้
   1) $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$
   2) $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$
   3) $\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาค่าของ
   1) $\cos(-375^\circ)$
   2) $\sin 195^\circ$
   3) $\tan 345^\circ$
   4) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
   5) $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$
   6) $\sec 105^\circ$
   7) $\cot 165^\circ$
   8) $\operatorname{cosec} 795^\circ$

2. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้
   1) $\sin 110^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \cos 110^\circ$
   2) $\sin 22^\circ \cos 38^\circ + \cos 22^\circ \sin 38^\circ$
   3) $\cos 160^\circ \cos 20^\circ - \sin 160^\circ \sin 20^\circ$
   4) $\cos 40^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ \sin 10^\circ$
   5) $\frac{\tan 220^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 220^\circ \tan 40^\circ}$
   6) $\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$
   7) $\sin 40^\circ \sin 160^\circ - \cos 40^\circ \cos 160^\circ$
   8) $\sin 16^\circ \sin 46^\circ + \sin 74^\circ \sin 44^\circ$

3. ถ้า $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ และ $\cos\beta = \frac{12}{13}$ เมื่อ α และ β อยู่ในจตุภาคที่ 1 จงหาค่าของ
   1) $\sin(\alpha+\beta)$
   2) $\sin(\alpha-\beta)$
   3) $\cos(\alpha+\beta)$
   4) $\cos(\alpha-\beta)$

4. ถ้า $\tan\alpha = \frac{3}{5}$ และ $\cot\beta = \frac{12}{5}$ เมื่อ α และ β อยู่ในจตุภาคที่ 3 จงหาค่าของ
   1) $\sin(\alpha+\beta)$
   2) $\cos(\alpha+\beta)$

5. ถ้า $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ และ $\operatorname{cosec}\beta = \frac{13}{12}$ เมื่อ α และ β อยู่ในจตุภาคที่ 2 จงหาค่าของ
   1) $\tan(\alpha+\beta)$
   2) $\cot(\alpha-\beta)$

6. ถ้า $\tan\alpha = -\frac{7}{24}$ และ $\cot\beta = \frac{3}{4}$ เมื่อ α และ β อยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 3 ตามลำดับ จงหาค่าของ
   1) $\sec(\alpha+\beta)$
   2) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$

7. กำหนด $\sin(\alpha+\beta) = \frac{56}{65}$ และ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ จงหา $\cos\beta$

8. ถ้า $\tan\alpha = \frac{5}{6}$ และ $\tan\beta = \frac{1}{11}$ และ $\alpha+\beta$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 จงหาค่าของ $\alpha+\beta$

9. ถ้า $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}$ และ $\cos(\alpha-\beta) = \frac{5}{6}$ จงหาค่าของ $\cos\alpha \cdot \cos\beta$

10. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

3) $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha$

4) $\dfrac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\tan\beta$

5) $\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}=\cot(\alpha-\beta)$

6) $\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}=\cot(\alpha+\beta)$

7) $\dfrac{\cot(\alpha+\beta)\cot\alpha+1}{\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)}=\cot\beta$

8) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{4\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$