

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า

จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 4.2

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้
แล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของ $\sin 2\alpha$
และ $\cos 2\alpha$ ในรูปของ
 $\sin \alpha$ หรือ $\cos \alpha$ ได้
2. บอกค่าของ $\tan 2\alpha$ ในรูป
ของ $\tan \alpha$ ได้
3. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ของจำนวนจริงหรือของมุม
โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
 $\sin 2\alpha$ $\cos 2\alpha$
และ $\tan 2\alpha$ ได้

เมื่อทราบค่าของ $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ หรือ $\tan \alpha$ ผู้เรียนสามารถนำค่าของ
ฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าวหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม
สองเท่าของ α ได้โดยอาศัยค่าของ $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ หรือ $\tan(\alpha+\beta)$ เช่น
หาค่าของ $\sin 2\alpha$ ได้โดย

$$\text{จาก } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\text{และ } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\text{และเนื่องจาก } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{aligned}\text{จึงทำให้ } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{หรือ } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

และ

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

นอกจากการค่าของ $\sin 2\alpha$ และ $\cos 2\alpha$ ข้างต้นเราสามารถนำวิธีการ
ข้างต้นช่วยในการหาค่าของ $\tan 2\alpha$ ได้ดังนี้

$$\text{จาก } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} \\ &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

สรุปสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติของ
จำนวนจริงหรือมุม 2 เท่า

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9 จงหาค่าของ

1. $\sin 15^\circ$ 2. $\cos 105^\circ$ 3. $\tan 75^\circ$
- วิธีทำ

1. $\sin 15^\circ$

ให้ $\alpha = 15^\circ$ ดังนั้น $2\alpha = 30^\circ$

จากสูตร $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

และ $\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \sin^2 15^\circ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &\approx 0.2588\end{aligned}$$

2. $\cos 105^\circ$

ให้ $\alpha = 105^\circ$ ดังนั้น $2\alpha = 210^\circ$

จากสูตร $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

และ $\cos 210^\circ = 2 \cos^2 105^\circ - 1$

$$\cos(180^\circ + 30^\circ) = 2 \cos^2 105^\circ - 1$$

$$-\cos 30^\circ = 2 \cos^2 105^\circ - 1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 105^\circ - 1$$

$$\cos 105^\circ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3})$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 105^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad (\because \cos 105^\circ < 0)$$

$$\cos 105^\circ \approx -0.2588$$

3. $\tan 75^\circ$

ให้ $\alpha = 75^\circ$ ดังนั้น $2\alpha = 150^\circ$

จากสูตร $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

และ $\tan 150^\circ = \frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$

$$-\tan 30^\circ = \frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$$

$$-1 + \tan^2 75^\circ = 2\sqrt{3} \tan 75^\circ$$

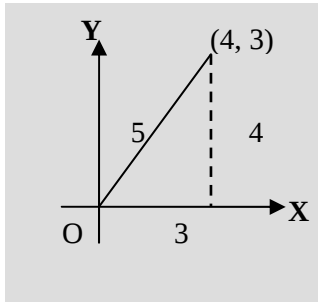
$$\tan^2 75^\circ - 2\sqrt{3} \tan 75^\circ - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \tan 75^\circ &= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12+4}}{2} \quad (\because \tan 75^\circ > 0) \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 4}{2} = \sqrt{3} + 2 \approx 3.7321\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 10 กำหนดให้ θ เป็นมุมในจตุภาคที่ 1 และ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ

- 1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

วิธีทำ



$$1. \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned}&= 2 \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{24}{25}\end{aligned}$$

$$2. \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{3}{5} \right)^2 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 \\ &= -\frac{7}{25}\end{aligned}$$

$$3. \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2 \left(\frac{4}{3} \right)}{1 - \left(\frac{4}{3} \right)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{8/3}{-7/9} = \left(\frac{8}{3} \right) \left(-\frac{9}{7} \right) = -\frac{24}{7}$$

กิจกรรม 3

1. จงหาค่าของ

1) $\sin 22.5^\circ$

2) $\cos 195^\circ$

3) $\sin(-67.5)$

4) $\tan \frac{7\pi}{8}$

5) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

6) $\sec \frac{15\pi}{8}$

7) $4\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

2. กำหนด $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ และ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ จงหาค่าของ

1) $\sin 2\theta$

2) $\cos 2\theta$

3) $\tan 2\theta$

3. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1) $\cot 2\theta = \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta}$

2) $\sec 2\theta = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta}$

3) $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 4\theta$

4) $\frac{\cos(2\theta)}{1 + \sin(2\theta)} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1) $\sin 105^\circ$

2) $\sin 22.5^\circ$

3) $\cos 67.5^\circ$

4) $\cos 157.5^\circ$

5) $\tan 15^\circ$

6) $\tan 157.5^\circ$

2. จงหาค่าของ $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ เมื่อกำหนดให้

1) $\sin \theta = \frac{4}{5}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

2) $\sec \theta = -\frac{13}{12}$ และ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

3) $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ และ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

4) $\sec \theta = -3$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

5) $\cot \theta = -\frac{5}{12}$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

3. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1) $\frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot \theta$

2) $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan \theta$

3) $\frac{\cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta} = \frac{\cot \theta + 1}{\cot \theta - 1}$

4) $\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot 2\theta$

5) $\tan \theta + \cot \theta = 2 \sec 2\theta$

6) $\frac{2 - \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \cos 2\theta$

7) $\frac{1 + \cot^2 \theta}{2 \cot \theta} = \sec 2\theta$

8) $\frac{\cot^2 \theta + 1}{\cot^2 \theta - 1} = \sec 2\theta$

4. กำหนด $\cot \theta = \frac{3}{7}$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ $3 \cos 2\theta + 7 \sin 2\theta$