

4.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 3 เท่า

จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 4.3

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้
แล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของ $\sin 3\alpha$ และ $\cos 3\alpha$ ในรูปของ $\sin \alpha$ หรือ $\cos \alpha$ ได้
2. บอกค่าของ $\tan 3\alpha$ ในรูปของ $\tan \alpha$ ได้
3. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ และ $\tan 3\alpha$ ได้

เราสามารถใช้อนุกรมการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมหรือจำนวนจริงสองเท่า และสูตรผลบวกฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมและจำนวนจริงสร้างสูตรการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมสามเท่าได้ โดย

กำหนดให้ α เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ

$$\text{จาก } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \text{ และ } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{แล้ว } \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha)$$

$$\sin(3\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= \sin 2\alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

ดังนั้น

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

นอกจากนี้ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

และ

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

กิจกรรม 4

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$1. \cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$2. \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$3. \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$$

ประโยชน์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 3 เท่าประการหนึ่งคือ ช่วยในการหาค่าของ $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$ หรือ $\tan 18^\circ$ โดยสามารถดำเนินการได้ดังนี้

ตัวอย่าง 11 จงหาค่าของ

1. $\sin 18^\circ$

2. $\cos 18^\circ$

3. $\tan 18^\circ$

สรุปสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติของ

จำนวนจริงหรือมุม 3 เท่า

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

วิธีทำ

1. $\sin 18^\circ$

กำหนดให้ $\alpha = 18^\circ$

ดังนั้น $5\alpha = 90^\circ$ และ $2\alpha = 90^\circ - 3\alpha$

จะได้ $\sin 2\alpha = \sin(90^\circ - 3\alpha)$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \cos 3\alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

เนื่องจาก $\cos \alpha = \cos 18^\circ \neq 0$ ดังนั้น

$$4 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

เนื่องจาก $\sin \alpha = \sin 18^\circ > 0$ ดังนั้น

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

2. $\cos 18^\circ$

จากผลที่ได้ในข้อ 1 และเนื่องจาก $\cos 18^\circ > 0$ ดังนั้น

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{16 - (6 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

3. $\tan 18^\circ$

$$\text{จาก } \tan 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

กิจกรรม 4

1. จงหาค่าของ

1) $\sin 36^\circ$

2) $\cos 36^\circ$

3) $\tan 36^\circ$

2. กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และ $\sin \theta = \frac{5}{13}$ จงหา

1) $\sin 3\theta$

2) $\cos 3\theta$

3. $\tan 3\theta$

แบบฝึกหัด 4.3

จงหาค่าของ $\sin \theta$, $\cos \theta$ และ $\tan \theta$ เมื่อกำหนด

1. $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ และ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

2. $\cos \theta = \frac{3}{5}$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

3. $\tan \theta = \frac{5}{12}$ และ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

4. $\cot \theta = \frac{3}{4}$ และ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

5. $\csc \theta = \frac{5}{3}$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

6. $\sec \theta = \frac{13}{12}$ และ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

7. $\tan \theta = 1$ และ $180^\circ < \theta < 270^\circ$

8. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ และ $270^\circ < \theta < 360^\circ$