



บทที่ 3

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

หัวข้อ

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม
5. การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง
6. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

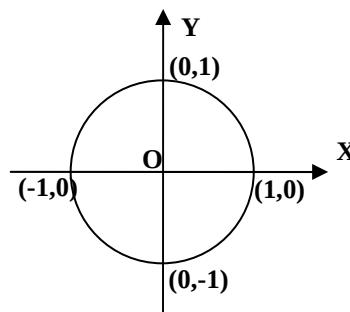
จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 3.1

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. สรุปได้ว่าถ้า (m, n) เป็นจุดปลายของส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วยโดยเริ่มวัดจากจุด $(1,0)$ โดยทิศทางทวนเข็มนาฬิกา แล้ว $m = \cos\theta$ และ $n = \sin\theta$
2. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้
3. สรุปได้ว่า $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ได้

คำว่า “ตรีโกณมิติ” ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า “Trigonometry” มาจากภาษากรีกคำว่า trigono = triangle และ metron = measure ซึ่งหมายถึงการวัดรูปสามเหลี่ยม วิชาตรีโกณมิติเกิดจากความจำเป็นในการวัดระยะทาง พื้นที่มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง ในสมัยก่อนวิชานี้จึงว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น ต่อมาวิชานี้จึงได้รับการพัฒนาขึ้นโดยลำดับ ปัจจุบันวิชาตรีโกณมิติมีประโยชน์ในด้านอื่น ๆ อีกมาก มีผู้นำฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ชั้นสูง ในวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ และในวิศวกรรมศาสตร์ ดังนั้นจึงถือว่าตรีโกณมิติที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเป็นเพียงส่วนหนึ่งของวิชานี้เท่านั้น

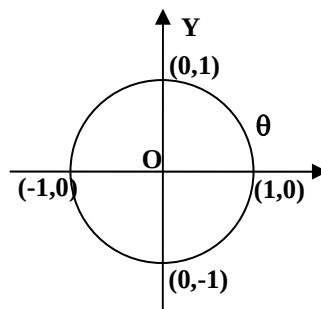
ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ ในที่นี้จะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเรียกวงกลมดังกล่าวนี้ว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The Unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$



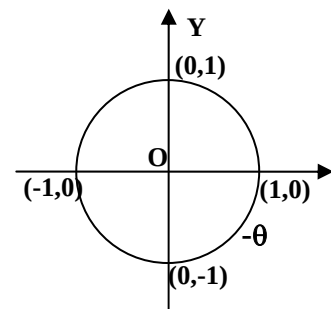
เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) จากจุด $(1,0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลม โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

ถ้า $\theta \geq 0$ จะวัดส่วนโค้งไปทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งไปทิศทางตามเข็มนาฬิกา



การวัดส่วนโค้งไปทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



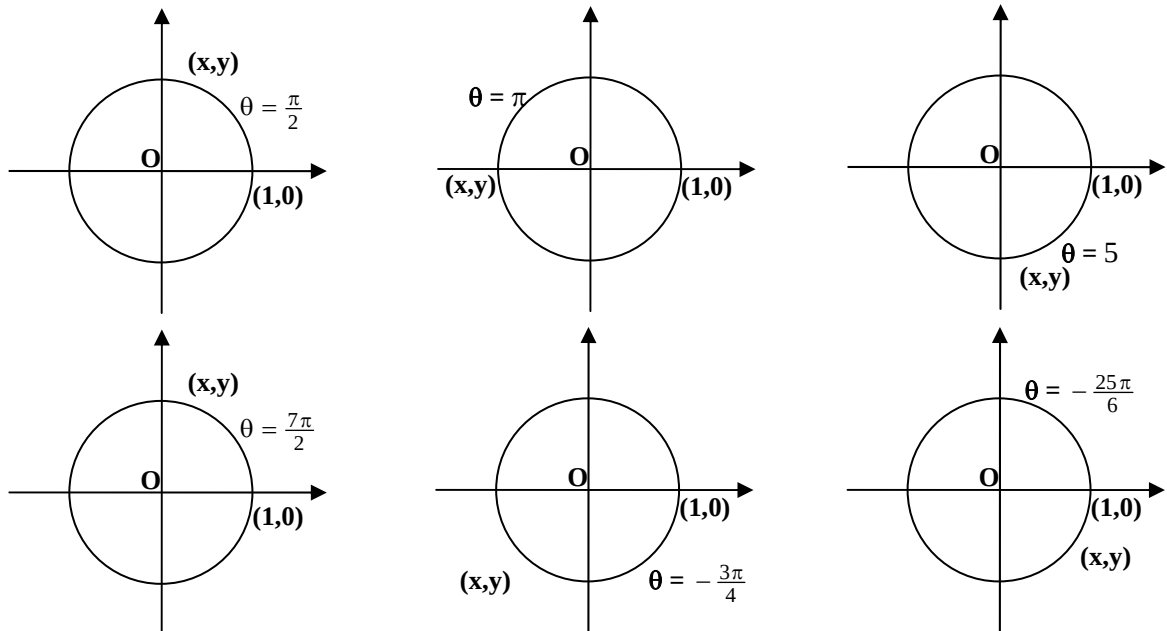
การวัดส่วนโค้งไปทิศทางตามเข็มนาฬิกา

หมายเหตุ

เส้นรอบวงของวงกลม
หนึ่งหน่วยมีความยาวเท่ากับ
 $2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$ หน่วย

ดังนั้นเมื่อกล่าวถึงจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะหมายถึง จุดปลายของส่วนโค้งที่เริ่มวัดระยะจากจุด $(1,0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปยาว $|\theta|$ หน่วย โดยทิศทาง

รูปต่อไปนี้จะแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีมีค่าต่าง ๆ กัน



จะเห็นว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ เราสามารถหาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ ได้เสมอ (ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่าวัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย) และสำหรับแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้ จะหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น

นั่นคือสำหรับแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะได้ x เพียง 1 ค่า จึงกล่าวได้ว่ามีฟังก์ชัน f ซึ่ง x เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ θ และเขียนได้ว่า $x = f(\theta)$ และสำหรับแต่ละค่าของ θ ที่กำหนดให้จะได้ y เพียง 1 ค่า จึงกล่าวได้ว่ามีฟังก์ชัน g ซึ่ง y เป็นค่าของฟังก์ชัน g ที่ θ และเขียนได้ว่า $y = g(\theta)$

ฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้นี้มีชื่อเฉพาะว่า ฟังก์ชันไซน์ (sine) และ ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) ตามลำดับ

บทนิยาม เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือ เซตของคู่อันดับ (θ, y)

ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือ เซตของคู่อันดับ (θ, x)

เนื่องจาก $(\theta, y) \in \text{sine}$ จะได้ $y = \sin(\theta)$ และ $(\theta, x) \in \text{cosine}$ จะได้ $x = \cos(\theta)$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้ว่า

$y = \sin(\theta)$ (อ่านว่า วาย เท่ากับ ไซน์ที่ตา)

$x = \cos(\theta)$ (อ่านว่า เอ็กซ์ เท่ากับ คอสิที่ตา)

โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ จะเห็นว่า $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง

หมายเหตุ

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $\cos$ ของ

จำนวนจริง θ^2

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin(\theta)$, $x = \cos(\theta)$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin(\theta)$ และ $\cos(\theta)$ ดังนี้

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงหรือเขียนตามความนิยมได้เป็น

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

กิจกรรม 1

- จงเขียนส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปยังจุดปลายของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว θ หน่วย ดังต่อไปนี้ (อย่างคร่าว ๆ)
 - $\theta = 4$
 - $\theta = -4$
 - $\theta = 6$
 - $\theta = -10$
 - $\theta = \frac{10\pi}{3}$
 - $\theta = \frac{-25\pi}{4}$
 - $\theta = \frac{14\pi}{5}$
 - $\theta = -\frac{31\pi}{6}$
- จงหาจำนวนจริง θ ที่ทำให้ $\sin \theta = -1$ มา 4 จำนวน
- จงหาจำนวนจริง θ ที่ทำให้ $\cos \theta = 0$ มา 4 จำนวน



Aryabhata

หนังสือ Surya Siddhanta ของฮินดูสมัยแรก ๆ (ราว 400 ปีก่อนคริสต์ศักราช) เป็นหนังสือดาราศาสตร์ที่ให้ตารางครึ่งคอร์ด โดยอาศัยพื้นฐานจากตารางของปโตเลมี แต่งงานชิ้นแรกที่ยาวถึงได้อย่างชัดเจนว่า sine เป็นฟังก์ชันของมุม คือ หนังสือ Aryabhatiya ของ Aryabhata (ราวพุทธศักราช 1053) ที่ได้รับการพิจารณาว่าเป็นตำราฮินดูเล่มแรกที่สุดว่าด้วยคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ในผลงานนี้ Aryabhata ได้ใช้คำว่า *ardha* – *jya* ในเครื่องหมายครึ่งคอร์ด ต่อมาใช้สั้นลงเป็น *jya* (ชยา) หรือ *jiva* ต่อมาเมื่อชาวอาหรับได้แปลหนังสือ Aryabhatiya มาเป็นภาษาอาหรับ ก็ยังคงใช้คำว่า *jiva* โดยไม่ได้มีการแปลความหมาย ซึ่งในภาษาอาหรับ (รวมถึงภาษาฮิบรู) คำต่าง ๆ จะประกอบด้วยพยัญชนะเป็นส่วนใหญ่ การออกเสียงสระที่ขาดหายไปก็จะละไว้ในฐานที่เข้าใจ ดังนั้น คำว่า *jiva* สามารถออกเสียงเป็น *jiba* หรือ *jiab* ซึ่งในภาษาอาหรับ หมายถึง ออกอ่าว หรือมุม ต่อมาหนังสือฉบับภาษาอาหรับถูกแปลไปเป็นภาษาละติน

คำว่า *jiab* ถูกแปลไปเป็น *sinus* (ในแผนที่ดวงจันทร์ บริเวณที่ถูกคล้ายกับอ่าว เรียกขานกันว่า sinus) คำว่า *sinus* ในหนังสือของ Gherardo แห่ง Cremona (ราวพุทธศักราช 1657 – 1730) ซึ่งได้แปลคำกรีกโบราณรวมทั้งหนังสือ Almagest จากอาหรับเป็นภาษาละติน นักเขียนอื่น ๆ ก็ต่างพากันใช้ตามและในไม่ช้าคำว่า *sinus* หรือ *sine* ในภาษาอังกฤษจึงกลายเป็นคำที่ใช้กันทั่วไปในตำราคณิตศาสตร์ตลอดทั่วยุโรป

