

3.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

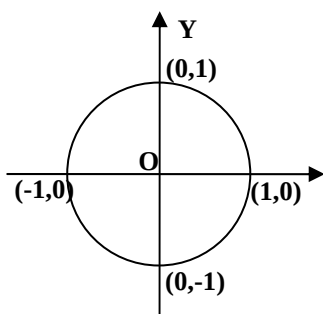
ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 3.2

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้
แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน(โดยอาศัยวงกลมหนึ่งหน่วย) เช่น
 $0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{3}$
2. หาจำนวนจริง θ บางจำนวนเมื่อกำหนดค่า $\sin \theta$ และค่า $\cos \theta$ เป็นจำนวนจริง
 $0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ หรือ ± 1 ได้
3. เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่กำหนดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ได้

ในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ เราจะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง θ ได้โดยอาศัยพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย ในหัวข้อนี้จะทำความเข้าใจกับนักเรียนในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยได้ด้วยวิธีง่าย ๆ ดังนี้



ถ้า $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วยคือ $(1, 0)$ ดังรูป จะได้

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1$$

โดยที่เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ หน่วย

จะมีพิกัดเป็น $(0,1)$, $(-1,0)$ และ $(0,-1)$ ตามลำดับ จะได้ว่า

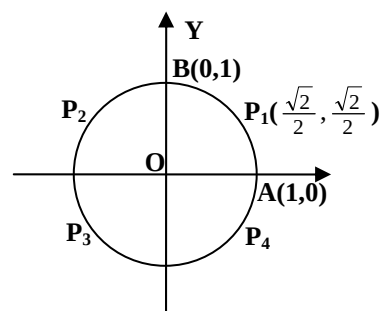
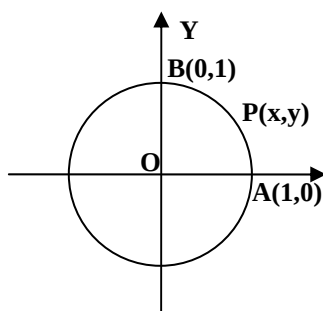
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\text{และ } \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

จะเห็นว่าค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม นั้น หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{n\pi}{2}$ หน่วย ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ และ $(0,-1)$

สำหรับสิ่งที่กล่าวต่อไปนี้จะพิจารณาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ และ $\frac{\pi}{6}$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ

$$PB = PA$$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้

$$x = y$$

แต่

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (เพราะจุด } (x, y) \text{ อยู่บนวงกลม)}$$

ดังนั้น

$$2x^2 = 1$$

หรือ

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เนื่องจาก (x, y) เป็นจุดอยู่ในจุดภาคที่ 1

ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

$$\text{จะได้ } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

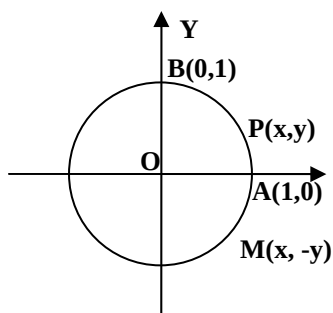
ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วยคือจุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$$

และโดยอาศัยรูปข้างต้น เรายังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และ

โคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ เช่น $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ ฯลฯ ได้อีกด้วย

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$



ให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดซึ่งทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PB จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M สมมาตรกับจุด P โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร จะได้ส่วนโค้ง AM ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วยและ M มีพิกัดเป็น $(x, -y)$ ดังนั้น ส่วนโค้ง PM จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB นั่นคือ

$$PM = PB$$

$$\sqrt{(y - (-y))^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$4y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$2(2y-1)(y+1) = 0$$

เนื่องจาก (x, y) เป็นจุดอยู่ในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

$$\text{จะได้ } y = \frac{1}{2} \text{ และ } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว } \frac{\pi}{6}$$

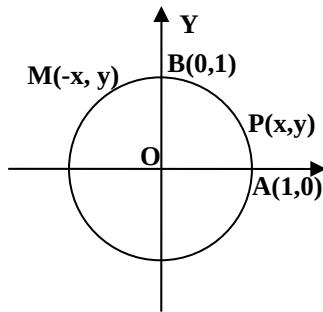
หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5000$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$

โดยอาศัยรูป อาจช่วยให้ผู้เรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ เช่น $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ ฯลฯ ได้อีกด้วย

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$



ให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดซึ่งทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย และให้จุด M สมมาตรกับจุด $P(x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้นพิกัดจุด M คือ $(-x, y)$ และส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมนี้ยาว π หน่วย ดังนั้นส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ด้วย

จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ

$$PM = PA$$

$$\sqrt{(x - (-x))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$4x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \quad (\text{เพราะ } x^2 + y^2 = 1)$$

$$2(2x - 1)(x + 1) = 0$$

เนื่องจาก (x, y) เป็นจุดอยู่ในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

จะได้ $x = \frac{1}{2}$ และ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$

หน่วย คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5000$

โดยอาศัยรูป อาจช่วยให้ผู้เรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ของจำนวนจริงอื่น ๆ เช่น $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ ฯลฯ ได้อีกด้วย

สรุป

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

กิจกรรม 2

- จงเขียนรูปวงกลมหนึ่งหน่วยและเขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย โดย θ เป็น $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ ไว้ในรูปเดียวกัน พร้อมทั้งแสดงค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนเหล่านั้นไว้บนแกน Y และแกน X จากรูป จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้ $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$
- จงแสดงเหตุผลว่ามีจำนวนจริง θ ใดหรือไม่ที่ทำให้ $\sin \theta = 2$ หรือไม่

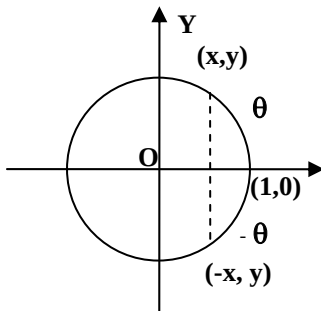
ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ

- $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
- $2 \sin \frac{\pi}{3} + 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

กิจกรรม 3

จงหาค่าของ

- $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2}$
- $\sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{2}$
- $\cos \pi - 3 \sin \frac{3\pi}{2}$
- $\left(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}\right)\left(\sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}\right)$
- $\frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3}$



ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

จากที่ผ่านมามีได้กล่าวถึงวิธีการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนไปบ้างแล้ว จะเห็นได้ว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ θ ทำได้โดยหา (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย แต่โดยที่แกน X เป็นแกนสมมาตร แกนหนึ่งของวงกลมหนึ่งหน่วย ถ้าส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เชื่อมระหว่างจุด $(1, 0)$ กับจุด (x, y) ยาว $|\theta|$ หน่วย ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่เชื่อมระหว่างจุด $(1, 0)$ กับจุด $(x, -y)$ จะต้องยาว $|\theta|$ หน่วย ดังนั้นเมื่อ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย คือจุด (x, y) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\theta$ หน่วย จะเป็นจุด $(x, -y)$

จากจุด (x, y) กับจุด $(x, -y)$ ทำให้สามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta & y &= \sin \theta \quad \text{และ} \\ x &= \cos(-\theta) & -y &= \sin(-\theta) \end{aligned}$$

สรุป

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกใด ๆ ได้ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{จะได้ } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เนื่องจากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบจะหาได้เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงลบนั้น ต่อไปนี้จะพิจารณาเฉพาะวิธีหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกเท่านั้น

ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n เหลือเศษ α (แอลฟา)
นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $0 \leq \alpha < 2\pi$

ดังนั้นการวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1,0)$ ไปยาว θ หน่วย นั้นจึงวัดไป α หน่วยก็พอแล้ว เพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่าการวัดต้องวัดครบรอบวงกลม n รอบ

จึงสามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos \theta &= \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha\end{aligned}$$

จากสมบัติดังกล่าวจะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย ซึ่งจะทำให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เสมอ

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\sin \frac{25\pi}{4}$ และ $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ เพราะ} \sin \frac{25\pi}{4} &= 6\pi + \frac{\pi}{4} \\ &= (3 \times 2\pi) + \frac{\pi}{4} \\ \text{ดังนั้น } \sin \frac{25\pi}{4} &= \sin\left\{(3 \times 2\pi) + \frac{\pi}{4}\right\} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{และ } \cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) &= \cos \frac{11\pi}{3} \\ &= \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

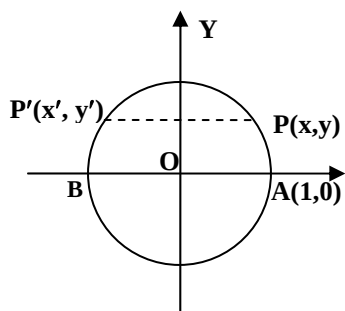
กิจกรรม 3

จงหาค่าของ

- | | |
|--|---|
| 1. $\sin \frac{9\pi}{4}$ | 2. $\cos \frac{9\pi}{2}$ |
| 3. $\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$ | 4. $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ |
| 5. $\sin \frac{19\pi}{3} + \cos \frac{49\pi}{6}$ | 6. $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ |

เราทราบแล้วว่าเมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ แต่โดยที่วงกลมหนึ่งหน่วยมีแกน X และแกน Y เป็นแกนสมมาตรหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ทำได้ดังนี้



สรุป

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$$

1) เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยอยู่ในจุดภาคที่ 2 ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)

ให้ $P'(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ส่วน $P'B$ จึงยาว $\pi - \theta$ หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ สมมาตรกับจุด $P'(x',y')$ โดยมีแกน Y เป็นแกน

สมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาว $\pi - \theta$ หน่วย และ $y' = y$ และ $x' = -x$

เมื่อจุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\pi - \theta$ หน่วย

ดังนั้น $y = \sin(\pi - \theta)$ และ $x = \cos(\pi - \theta)$

นั่นคือ $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$ และ $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$ จงหาค่าของ

$$\sin \frac{11\pi}{12} \text{ และ } \cos \frac{11\pi}{12}$$

วิธีทำ

$$1. \sin \frac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{12}$$

$$= 0.26$$

$$2. \cos \frac{11\pi}{12} = -\cos\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{12}$$

$$= -0.96$$

กิจกรรม 4

จงหาค่าของ

$$1. \sin \frac{27\pi}{4}$$

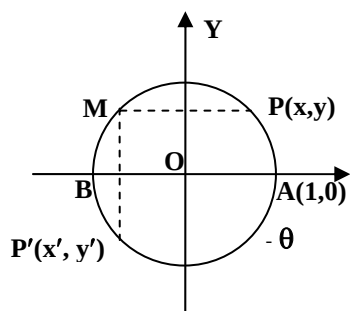
$$2. \cos \frac{38\pi}{3}$$

$$3. \cos\left(-\frac{65\pi}{6}\right)$$

$$4. \sin\left(-\frac{53\pi}{2}\right)$$

$$5. \sin \frac{27\pi}{2} + \cos\left(-\frac{89\pi}{6}\right)$$

$$6. \sin^2\left(\frac{51\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{80\pi}{3}\right)$$



2) เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยอยู่ในจุดภาคที่ 3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$)

ให้ $P'(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ส่วน BP' จึงยาว $\theta - \pi$ หน่วย

ให้จุด M สมมาตรกับจุด $P'(x',y')$ โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

ให้จุด $P(x, y)$ สมมาตรกับจุด M โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาว $\theta - \pi$ หน่วย และ $y' = -y$ และ $x' = -x$

เมื่อจุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\theta - \pi$ หน่วย ด้วย

จะได้ $y = \sin(\theta - \pi)$ และ $x = \cos(\theta - \pi)$

นั่นคือ $\sin \theta = -\sin(\theta - \pi)$ และ $\cos \theta = -\cos(\theta - \pi)$

สรุป

$$\sin \theta = -\sin(\theta - \pi)$$

$$\cos \theta = -\cos(\theta - \pi)$$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{12} = 0.26$ และ $\cos \frac{\pi}{12} = 0.96$ จงหาค่าของ

$$\sin \frac{13\pi}{12} \text{ และ } \cos \frac{13\pi}{12}$$

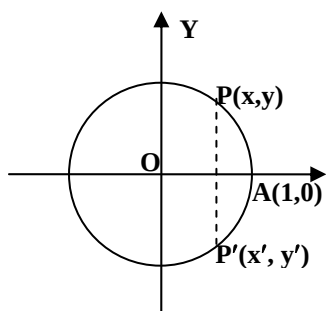
วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin \frac{13\pi}{12} &= -\sin\left(\frac{13\pi}{12} - \pi\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{12} \\ &= -0.26 \\ 2. \quad \cos \frac{13\pi}{12} &= -\cos\left(\frac{13\pi}{12} - \pi\right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{12} \\ &= -0.96 \end{aligned}$$

กิจกรรม 5

จงหาค่าของ

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin \frac{17\pi}{4} & \quad 2. \quad \cos \frac{34\pi}{3} \\ 3. \quad \sin\left(-\frac{63\pi}{2}\right) & \quad 4. \quad \cos\left(-\frac{103\pi}{6}\right) \\ 5. \quad \sin \frac{35\pi}{2} \cdot \cos\left(-\frac{46\pi}{3}\right) & \quad 6. \quad \cos^3 \frac{46\pi}{3} - \sin^3 \frac{105\pi}{6} \end{aligned}$$



3) เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยอยู่ในจุดภาคที่ 4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$)

ให้ $P'(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

จะได้ส่วนโค้ง $P'A$ จึงยาว $2\pi - \theta$ หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ สอดคล้องกับจุด $P'(x',y')$ โดยมีแกน X เป็นแกน

สมมาตร

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาว $2\pi - \theta$ หน่วย และ $y' = -y$ และ $x' = x$

เมื่อจุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $2\pi - \theta$ หน่วย

ดังนั้น $y = \sin(2\pi - \theta)$ และ $x = \cos(2\pi - \theta)$

นั่นคือ $\sin \theta = -\sin(2\pi - \theta)$ และ $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$

ตัวอย่าง 6 จงหาฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ $\frac{11\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sin \frac{11\pi}{6} &= -\sin\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \\ \text{และ } \cos \frac{11\pi}{6} &= \cos\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

กิจกรรม 6

จงหาค่าของ

1. $\cos \frac{71\pi}{6}$

2. $\sin \frac{33\pi}{4}$

3. $\sin\left(-\frac{35\pi}{2}\right)$

4. $\cos\left(-\frac{89\pi}{3}\right)$

5. $1 - \sin^2\left(-\frac{39\pi}{2}\right)$

6. $2 \sin\left(-\frac{59\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{59\pi}{6}\right)$

สำหรับกรณีที่จำนวนจริงที่กำหนดให้ไม่อยู่ในรูปของ π ก็จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงนั้น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 7 จงเขียนค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง 2 และ -6 ให้อยู่ในรูปค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 2 หน่วยอยู่ในจุดภาคที่ 2 ดังนั้น

$$\sin 2 = \sin(\pi - 2)$$

$$\cos 2 = -\cos(\pi - 2)$$

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 6 หน่วยอยู่ในจุดภาคที่ 4 ดังนั้น

$$\sin 6 = -\sin(2\pi - 6)$$

$$\cos 6 = \cos(2\pi - 6)$$

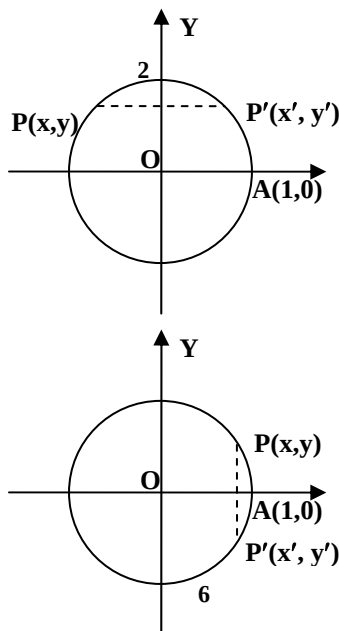
เพราะว่า $\sin(-A) = -\sin A$ และ $\cos(-A) = \cos A$

$$\text{ดังนั้น } \sin(-6) = -\sin 6$$

$$= \sin(2\pi - 6)$$

$$\text{และ } \cos(-6) = \cos 6$$

$$= \cos(2\pi - 6)$$



กิจกรรม 7

จงหาค่าของ

1. $\sin \frac{17\pi}{3}$

2. $\cos \frac{59\pi}{6}$

3. $\sin\left(-\frac{95\pi}{4}\right)$

4. $\cos\left(-\frac{53\pi}{3}\right)$

5. $1 - \frac{\cos^2\left(\frac{63\pi}{4}\right)}{1 + \sin \frac{63\pi}{4}}$

6. $\left(\sin \frac{23\pi}{3} + \cos \frac{23\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin \frac{23\pi}{3} - \cos \frac{23\pi}{3}\right)^2$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1) 3π | 2) 8π |
| 3) -5π | 4) -2π |
| 5) $-\frac{\pi}{2}$ | 6) $-\frac{3\pi}{2}$ |
| 7) $-\frac{5\pi}{4}$ | 8) $-\frac{7\pi}{4}$ |
| 9) $2\pi + \frac{\pi}{4}$ | 10) $2\pi + \frac{3\pi}{4}$ |
| 11) $-\frac{\pi}{3}$ | 12) $-\frac{7\pi}{6}$ |
| 13) $-\frac{7\pi}{3}$ | 14) $\frac{13\pi}{3}$ |
| 15) $\frac{37\pi}{6}$ | 16) $\pi - \frac{\pi}{3}$ |

2. จงบอกจำนวนจริง θ มา 5 จำนวนที่ทำให้

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\sin\theta = 0$ | 2) $\sin\theta = 1$ |
| 3) $\cos\theta = 1$ | 4) $\sin\theta = -1$ |
| 5) $\cos\theta = -1$ | 6) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ |
| 7) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 8) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

3. ถ้า $\sin\theta = 0.56$ จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจุดภาคใดได้บ้าง

4. ถ้า $\cos\theta = -0.56$ จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจุดภาคใดได้บ้าง

5. ถ้า $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ จงหาค่า $\cos x$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

6. จงเขียนค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| 1) $\frac{13\pi}{12}$ | 2) $\frac{5\pi}{3}$ |
| 3) 4 | 4) 5 |
| 5) 6.1 | 6) 7 |
| 7) -8 | 8) -9 |
| 9) -3.14 | 10) -7.54 |

7. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 0.4848$ จงหาค่าของ

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $\cos\theta$ | 2) $\sin(\pi - \theta)$ |
| 3) $\cos(\pi + \theta)$ | 4) $\sin(-\theta)$ |
| 5) $\cos(\theta - 2\pi)$ | 6) $\sin(3\pi - \theta)$ |

8. จงพิจารณาว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

- 1) $\sin\theta \geq \cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$
- 2) $-2 \leq \sin\theta + \cos\theta \leq 2$ เมื่อ $\theta \in \mathbb{R}$
- 3) $\sin\theta = \cos\theta$ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{5\pi}{4}$