

3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 3.3

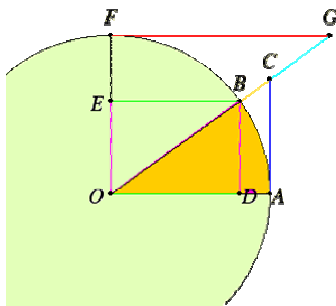
เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้
แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ของจำนวนจริงบางจำนวนได้
ครบทั้งหกฟังก์ชันได้
2. บอกความสัมพันธ์ระหว่าง
ฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ
ดังเช่น

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$



จากรูปเป็นวงกลมหนึ่งหน่วย
โดยมีส่วนโค้ง AB ยาว θ หน่วย

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้วข้างต้น ยังมีฟังก์ชัน
ตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

เขียนแทน “tangent θ ” ด้วย “ $\tan \theta$ ” อ่านว่า แทนทีตา

เขียนแทน “secant θ ” ด้วย “ $\sec \theta$ ” อ่านว่า เซกทีตา

เขียนแทน “cosecant θ ” ด้วย “ $\operatorname{cosec} \theta$ ” หรือ “ $\operatorname{csc} \theta$ ” อ่านว่า โคเซก
ทีตา

เขียนแทน “cotangent θ ” ด้วย “ $\cot \theta$ ” อ่านว่า คอตทีตา

ตามประวัติของตรีโกณมิติ Aryabhata ได้เรียกส่วนของเส้นตรง BD ว่า
ครึ่งคอร์ด ซึ่งเขียนเป็นภาษาอาหรับในปัจจุบันได้เป็น jaib และตอนหลังมีผู้แปล
เป็นภาษาลาตินเป็น sinus ซึ่งได้กลายมาเป็น sine ในที่สุด สำหรับส่วนของ
เส้นตรงอื่น ๆ ที่เหลือ อาจเรียกได้ดังนี้

$\overline{BE}$ เรียกว่าครึ่งคอร์ดที่คู่กัน มาจากคำว่า **cosine**

$\overline{AC}$ เรียกว่าเส้นสัมผัสวง มาจากคำว่า **tangent**

$\overline{GF}$ เรียกว่าเส้นสัมผัสวงที่คู่กัน มาจากคำว่า **cotangent**

$\overline{OC}$ เรียกว่าเส้นผ่านวง มาจากคำว่า **secant**

$\overline{OG}$ เรียกว่าเส้นผ่านวงที่คู่กัน มาจากคำว่า **cosecant**

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างส่วนของเส้นตรงเหล่านี้ โดยอาศัย

คุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย จะพบว่า

$$\frac{|AC|}{|AQ|} = \frac{|BD|}{|DO|} \quad \frac{|OC|}{|OB|} = \frac{|AQ|}{|OD|}$$

$$|AC| = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad |OC| = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{|FG|}{|OF|} = \frac{|BE|}{|OE|} \quad \frac{|OG|}{|OB|} = \frac{|OF|}{|OE|}$$

$$|FG| = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad |OG| = \frac{1}{\sin \theta}$$

ซึ่งจะเห็นว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีความสัมพันธ์กับนิยามของฟังก์ชัน
ตรีโกณมิติต่าง ๆ ข้างต้น

จากบทนิยามข้างต้น อาจหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้เช่น

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta, \cos \theta \neq 0$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้อาจพิสูจน์ได้โดยตรงจากบทนิยาม เช่น

$$1) \text{ จะแสดงว่า } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta, \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$2) \text{ จะแสดงว่า } 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \theta &= 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \sec^2 \theta \end{aligned}$$

สำหรับความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่ไม่ได้พิสูจน์ ก็อาจพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน
ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ที่สำคัญนอกจากที่กล่าวมามีดังนี้

ตัวอย่าง 8 จงทำให้อยู่ในรูปของ $\tan \theta$

$$1) \tan(\pi - \theta)$$

$$2) \tan(\pi + \theta)$$

$$3) \tan(2\pi - \theta)$$

$$4) \tan(2\pi + \theta)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1) \quad \tan(\pi - \theta) &= \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} \\ &= -\tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \tan(\pi + \theta) &= \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \tan(2\pi - \theta) &= \frac{\sin(2\pi - \theta)}{\cos(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= -\tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \tan(2\pi + \theta) &= \frac{\sin(2\pi + \theta)}{\cos(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9 จงทำให้อยู่ในรูปของ cosec θ

1) cosec($\pi - \theta$)

2) cosec($\pi + \theta$)

3) cosec($2\pi - \theta$)

4) cosec($2\pi + \theta$)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{cosec } \theta(\pi - \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \text{cosec } \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \text{cosec } \theta(\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{-\sin \theta} \\ &= -\text{cosec } \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{cosec } \theta(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\sin(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\sin \theta} \\ &= -\text{cosec } \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \text{cosec } \theta(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \text{cosec } \theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 10 จงทำให้อยู่ในรูปของ sec θ

1) cosec($\pi - \theta$)

2) cosec($\pi + \theta$)

3) cosec($2\pi - \theta$)

4) cosec($2\pi + \theta$)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1) \quad \sec \theta(\pi - \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\cos \theta} \\ &= -\sec \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sec \theta(\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{-\cos \theta} \\ &= -\sec \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \sec \theta(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\cos(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \sec \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \sec \theta(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \sec \theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 11 จงทำให้อยู่ในรูปของ $\sec \theta$

- 1) $\cot(\pi - \theta)$
3) $\cot(2\pi - \theta)$

- 2) $\cot(\pi + \theta)$
4) $\cot(2\pi + \theta)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1) \cot \theta(\pi - \theta) &= \frac{1}{\tan(\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\tan \theta} \\ &= -\cot \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \cot \theta(\pi + \theta) &= \frac{1}{\tan(\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \cot \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \cot \theta(2\pi - \theta) &= \frac{1}{\tan(2\pi - \theta)} \\ &= \frac{1}{-\tan \theta} \\ &= -\cot \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \cot \theta(2\pi + \theta) &= \frac{1}{\tan(2\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \cot \theta \end{aligned}$$

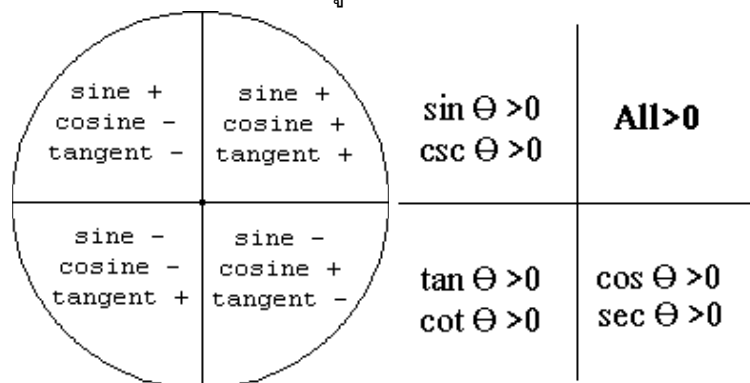
จากตัวอย่าง 8 – 11 ผู้เรียนจะเห็นว่า ถ้าเรามีความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์แล้ว เราสามารถนำฟังก์ชันดังกล่าวช่วยในการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ที่เหลือได้ และเพื่อให้ให้นักเรียนได้มองเห็นภาพอย่างเป็นหมวดหมู่สามารถนำไปช่วยในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ ผู้เขียนจึงขอสรุปการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\pi \pm \theta$ และ $2\pi \pm \theta$ ดังนี้

ข้อสังเกต

ผลที่ได้ลักษณะของฟังก์ชันตรีโกณมิติยังคงเหมือนเดิม กล่าวคือ ฟังก์ชันไซน์ยังคงเป็นฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ยังคงเป็นฟังก์ชันโคไซน์ ฟังก์ชันแทนเจนต์ยังเป็นฟังก์ชันแทนเจนต์ เป็นต้น สิ่งที่จะต่างกันคือ เครื่องหมายบวก – ลบ ซึ่งจะเป็นอย่างไรขึ้นอยู่กับว่าจุดปลายของส่วนโค้งจะอยู่ในจุดภาคใด

จุดภาคที่	$\sin \theta, \csc \theta$	$\cos \theta, \sec \theta$	$\tan \theta, \cot \theta$
1	บวก	บวก	บวก
2	บวก	ลบ	ลบ
3	ลบ	ลบ	บวก
4	ลบ	บวก	ลบ

และเพื่อให้เห็นภาพที่ชัดเจนขึ้นผู้เขียนขอนำเสนอด้วยภาพ ดังนี้



นอกจากนี้ยังสามารถสรุปเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงลบ ได้ดังนี้

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\cot \operatorname{an}(-\theta) = -\cot \operatorname{an} \theta$

จากที่กล่าวมาเราสามารถนำความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ มาช่วยในการแก้ปัญหา ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 12 จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= \sin \frac{\pi}{3} \left\{ -\cos \left(\pi - \frac{5\pi}{6} \right) \right\} + \left\{ -\sin \left(\frac{4\pi}{3} - \pi \right) \right\} \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= \sin \frac{\pi}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{6} \right) - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= -2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 13 จงหาค่าของ

$$\begin{aligned}
 & \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + \tan \frac{\pi}{3} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \cot \frac{5\pi}{6} \sec \left(-\frac{7\pi}{6} \right) \\
 & \text{วิธีทำ } \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + \tan \frac{\pi}{3} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \cot \frac{5\pi}{6} \sec \left(-\frac{7\pi}{6} \right) \\
 &= -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + \tan \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} - \cot \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \sec \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= -\sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{6} \\
 &= -\frac{1}{2} + 0 - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} - 2 \\
 &= -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

กิจกรรม 8

จงหาค่าของ

- $3 \sin \frac{25\pi}{6} - 3 \tan \frac{13\pi}{4} + 2 \cos \frac{19\pi}{3}$
- $\sin \frac{2\pi}{3} \tan \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{3}$
- $\tan \frac{11\pi}{6} \sec \frac{11\pi}{6} + \sec \frac{4\pi}{3} \operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3}$
- $\sec \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{4} \operatorname{cosec} \left(-\frac{15\pi}{4} \right) \tan \left(-\frac{31\pi}{6} \right)$
- $\tan \left(-\frac{15\pi}{4} \right) \sin \left(-\frac{31\pi}{6} \right) \cot \frac{19\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{57\pi}{2}$

แบบฝึกหัด 3.3

- จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจุดภาคใด เมื่อกำหนดให้
 - $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เป็นจำนวนบวกทั้งคู่
 - $\tan\theta$ เป็นจำนวนบวก และ $\cos\theta$ เป็นจำนวนลบ
 - $\sin\theta$ เป็นจำนวนบวก และ $\tan\theta$ เป็นจำนวนลบ
 - $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ เป็นจำนวนลบทั้งคู่

- จงเติมค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
sin										
cos										
tan										
cosec										
sec										
cot										

- กำหนดให้ $\sin\theta = 0.48$ และ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของ θ

- ถ้า $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\sec\theta + \csc\theta$

- ถ้า $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $2\cos\theta + \cot\theta$

- จงหาค่าของ

- $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{3} + \tan\frac{9\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6}$

- $\sin\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6} - \cos\frac{3\pi}{4} \sin\frac{4\pi}{3}$

- $\frac{1 - \cot^2\frac{35\pi}{6}}{1 + \cot^2\frac{35\pi}{6}} + 2\cos^2\frac{35\pi}{6}$

- $\sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{3} - \tan\frac{5\pi}{3}$

- $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{11\pi}{6}$

- $\tan^2\frac{13\pi}{4} \cos^2\frac{13\pi}{4} + \cot^2\frac{13\pi}{4} \sin^2\frac{13\pi}{4}$

- $\tan^2\frac{7\pi}{6} + \sin^4\frac{11\pi}{4} + \sec\frac{10\pi}{3}$

- $\sin\frac{3\pi}{2} + \tan\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \cot\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{7\pi}{6}$

- $\tan\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + \cot\left(-\frac{21\pi}{4}\right) - \sec\left(-\frac{21\pi}{4}\right) \csc\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$

- $\sin\frac{2\pi}{3} \tan\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cot\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

- ข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}$

- $\sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{6} = 1$

- $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{2}$

- $\cos\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6}$

- $\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2}$