3.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

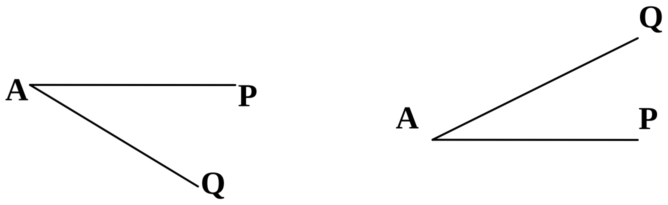
จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 3.4

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้ แล้วนักเรียนสามารถ

1. เปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียน และเปลี่ยนขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนให้เป็นหน่วยองศา
2. บอกค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมบางมุม เช่น 0°, ±30°, ±45°, ±60°,±90°,±180°,±270°
3. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวของด้านให้
4. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากที่กล่าวมาในหัวข้อที่ 3.1 – 3.3 ผู้เขียนได้กล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงโดยนิยามจากวงกลมหนึ่งหน่วย สำหรับในหัวข้อนี้ผู้เขียนจะได้กล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ดังต่อไปนี้

(1) มุมและการวัดมุม



ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง AP รอบจุด A ไปอยู่ในแนว AQ สิ่งที่เกิดขึ้นเรียกว่ามุม และเรียกส่วนที่เกี่ยวข้องกับมุมดังนี้

เรียกจุด A ว่า จุดยอด (Vertex) ของมุม

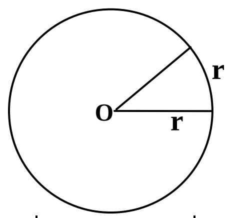
เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (Initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักกันแล้วคือ องศา (°) โดยถือว่ามุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360° และ แบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา (′) และฟิลิปดา (″) ดังนี้

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

หน่วยการวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วยจะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วย จะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

หมายเหตุ

สำหรับวงกลมรัศมี r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วย แล้ว $\theta = \frac{a}{r}$

จะเห็นว่าสำหรับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วยซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วย จะมีขนาด $\frac{a}{r}$ เรเดียน และถ้าให้ขนาดของมุมดังกล่าวเป็น θ เรเดียน จะได้ว่า $\theta = \frac{a}{r}$

จะได้ว่า

360 องศา = 2π เรเดียน

หรือ

180 องศา = π เรเดียน

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่มีดังกล่าวเมื่อวัดเป็นองศาได้ 360 องศา

ดังนั้น 1 องศา $= \frac{\pi}{180}$ เรเดียน ≈ 0.01745 เรเดียน

และ 1 เรเดียน $= \frac{180}{\pi}$ องศา $\approx 57°18'$

ตัวอย่าง 14 จงเปลี่ยน $\frac{1}{2}$ เรเดียนให้เป็นองศา

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

ดังนั้น $\frac{1}{2}$ เรเดียน $= \frac{1}{2} \times \frac{180}{\pi}$ องศา

$\approx \frac{90}{3.1416}$ องศา

≈ 28.65 องศา

$\approx 28°39'$

ตัวอย่าง 15 จงเปลี่ยน 75° ให้เป็นเรเดียน

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก 180 องศา = π เรเดียน

ดังนั้น $75° = 75 \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

$= \frac{5\pi}{12}$ เรเดียน

เนื่องจากมุมที่กล่าวถึงในที่นี้ เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปจากแนวเดิม ซึ่งการหมุนส่วนของเส้นตรงนั้นมีได้สองแบบ คือ หมุน***ทวน***เข็มนาฬิกา และหมุน***ตาม***เข็มนาฬิกา การบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง***ทวน***เข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วย<u>**จำนวนบวก**</u> ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง***ตาม***เข็มนาฬิกาจะแสดงขนาดของมุมด้วย<u>**จำนวนลบ**</u>

คำว่า **radian** ถูกนำมาใช้เมื่อ ราวประมาณ พ.ศ.2414 โดย เจมส์ ธอมสัน ซึ่งปรากฏเป็นสิ่งพิมพ์ในข้อสอบของเขาที่ Queen 's College ใน Belfast

กิจกรรม 9

1. จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้ จากองศาให้เป็นเรเดียน

1) 30°	2) 120°
3) – 135°	4) 350° (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)
5) $40°10'25''$ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)	6) $73°40'40''$ (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

2. จงเปลี่ยนมุมต่อไปนี้ จากหน่วยเรเดียนให้เป็นองศา

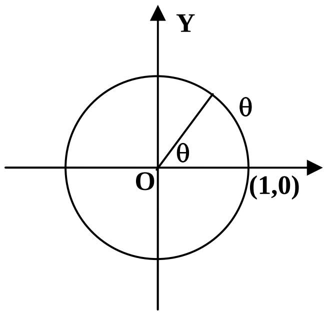
1. $\frac{5\pi}{6}$	2. $\frac{-2\pi}{3}$
3. $\frac{\pi}{12}$	4. $\frac{-3\pi}{4}$
5. 3.14	6. 10.25

(2) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงต่อไปนี้ จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อจุดยอดของมุม ๆ หนึ่งอยู่ที่จุด (0 , 0) และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ใน ตำแหน่งมาตรฐาน (Standard position)

สมมุติว่ามีมุม ๆ หนึ่งมีขนาด θ เรเดียน อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานดังรูป



โดยที่ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียนนั้นจะต้องยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาว θ หน่วย

จะเห็นว่าจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ เรเดียนตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นจะเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย คือ จุด$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $-\frac{\pi}{4}$ หน่วย

ดังนั้นเมื่อกำหนดมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงจุดเดียว และจุดนั้นจะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยด้วย หรือกล่าวได้ว่า ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม θ เรเดียนจะยาว θ หน่วย จะเห็นได้ว่าไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายของส่วนโค้ง จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุม หรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้นจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้น $\cos\theta$ อาจหมายถึง cos ของมุมที่มีขนาด θ เรเดียน หรือ cos ของจำนวนจริง θ ก็ได้

เนื่องจากหน่วยในการวัดมุมที่นิยมใช้กันนั้นมีอยู่สองหน่วย คือ เรเดียน และ องศา จากที่กล่าวแล้วข้างต้นจะเห็นว่าเมื่อหน่วยของมุมซึ่งอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานมีหน่วยเป็นเรเดียน จำนวนที่แสดงค่าของมุมนั้นจะเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนจริงที่แทนความยาวของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนจึงหาได้ตามที่กล่าวมาแล้ว ส่วนการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้น อาจหาได้โดยการเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นเรเดียนก่อน แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป

ตัวอย่าง 16 จงหาค่าของ $\sin 60^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ เรเดียน

ดังนั้น $\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง 17 จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}(-405^\circ)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\operatorname{cosec}(-405^\circ) = \dfrac{1}{\sin(-405^\circ)}$

และ
$$\begin{aligned}\sin(-405^\circ) &= -\sin 405^\circ \\ &= -\sin(360^\circ + 45^\circ) \\ &= -\sin 45^\circ \\ &= -\sin\frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}(-405^\circ) = \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 18 จงหาค่าของ $\cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\cos 240^\circ &= \cos(180^\circ + 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sin 120^\circ &= \sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos 150^\circ &= \cos(180^\circ - 30^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos 240^\circ \cos 120^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$
$$\begin{aligned}&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

หน่วยการวัดมุมแบบองศา เชื่อว่าเริ่มต้นใช้ในสมัยบาบิโลเนีย ที่ใช้ระบบตัวเลขฐาน 60 การวัดมุมแบบองศาอาศัยการแบ่งวงกลมออกเป็น 360 ส่วน โดยมีหลักฐานทางประวัติศาสตร์ที่พอเชื่อได้ว่าชาวบาบิโลเนียใช้วิธีการวัดมุมนี้โดยอาศัยพื้นฐานจากความใกล้เคียงกับหน่วยการวัดเวลาที่กำหนดให้ 1 ปี มี 365 วัน

ปัจจุบันเราเลิกใช้ระบบฐาน 60 แล้วแต่การแบ่งวงกลมออกเป็น 360 ส่วนยังคงใช้อยู่ ซึ่งอาจเป็นเพราะข้อปฏิบัตินี้ได้หยั่งลึกลงไปในชีวิตประจำวันจนเกิดความเคยชิน โดยเฉพาะการใช้งานในหน่วยของเวลาซึ่งใช้การแบ่ง 1 ชั่วโมงออกเป็น 60 นาที และ 1 นาที เป็น 60 วินาที

สำหรับคำว่า **degree** มีต้นกำเนิดในกรีก โดยกรีกใช้คำว่า μοιρα (moira)ต่อมาชาวอาหรับได้แปลเป็นคำว่า daraja (คล้ายกับภาษาฮิบรู dar'ggah ซึ่งแปลว่า ขั้นบันไดหรือมาตรา) และถูกแปลเป็นภาษาลาตินว่า de gradus ซึ่งเป็นที่มาของคำว่า degree

กรีกกำหนดให้ $\frac{1}{60}$ ของ 1 องศา ว่า first part และ $\frac{1}{60}$ ของ first part ว่า second part สำหรับภาษาลาตินเรียก first part ว่า pars minuta prima (first small part) และ second part ว่า pars minuta secunda (second small part) ซึ่งคำทั้งสองก็เป็นที่มาของคำว่า minute (ลิปดา , นาที) และ second (ฟิลิปดา,วินาที)

กิจกรรม10

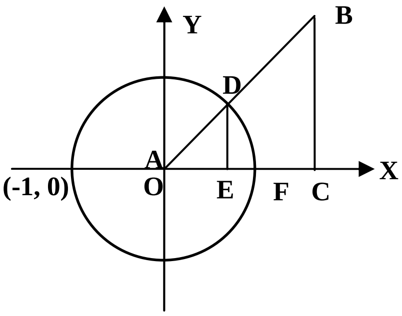
1. จงหาค่าของ

1) $\cos 420^\circ$	2) $\sin 390^\circ$
3) $\csc 540^\circ$	4) $\sin(-135^\circ)$
5) $\tan(-210^\circ)$	6) $\cot(-405^\circ)$

2. จงหาค่าของ
   1) $\cos(-330^\circ)\sin 420^\circ - \tan 225^\circ \cot 675^\circ$
   2) $\sin 300^\circ \cdot \tan 240^\circ \cdot \sec(-765^\circ)\cos(-540^\circ)$
   3) $\cos 270^\circ \sec 45^\circ + \cos 30^\circ \tan 60^\circ - \operatorname{cosec} 45^\circ \sec 45^\circ$
   4) $\cot 20^\circ - \dfrac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$
   5) $\dfrac{\cot(-405^\circ) + \cos(-780^\circ)}{\operatorname{cosec}(-390^\circ)}$
   6) $\dfrac{2\sin(-330^\circ) + \tan(-405^\circ)}{\cot^2 225^\circ}$

(3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ประโยชน์สำคัญของการศึกษาวิชาตรีโกณมิติอย่างหนึ่งคือ การนำความรู้ไปใช้ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พิจารณารูปด้านล่าง



จากรูปกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก ดังนั้น $\angle BAC < 90^\circ$ ให้ a , b , c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B , C ตามลำดับ วางรูปสามเหลี่ยมให้ $\angle BAC$ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานดังรูป ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม A คือส่วนโค้ง FD

ดังนั้น sinA = sin (ความยาวของส่วนโค้ง FD) = DE

cosA = cos (ความยาวของส่วนโค้ง FD) = AE

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ADE และรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น $\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$ และ $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$ แต่ AD = 1

จะได้ว่า $DE = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ และ $AE = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

นั่นคือ $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ และ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

จากที่กล่าวมาจึงสามารถสรุปได้ว่า

sin A = ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁA / ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁ©

cos A = ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹»ÃÐªÔ´ÁØÁA / ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁ©

tan A = ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁ / ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹»ÃÐªÔ´ÁØÁ

สำหรับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A ก็จะเป็นส่วนกลับของค่าของฟังก์ชันทั้งสามดังนี้

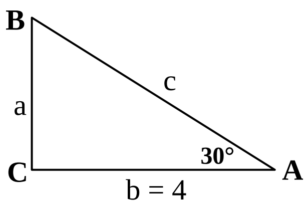
cos A = ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁ© / ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁA

sec A = ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁ© / ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹»ÃÐªÔ´ÁØÁA

cot A = ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹»ÃÐªÔ´ÁØÁ / ¤ÇÒÁÂÒÇ¢Í§éÒ¹µÃ§¢éÒÁÁØÁ

สมการข้างต้นมีประโยชน์อย่างมากในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 18 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 30° จงหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมนี้



<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\tan 30^\circ = \frac{a}{b}$

ดังนั้น $a = 4\tan 30^\circ$

$= \frac{4}{\sqrt{3}}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.309$

และ เนืองจาก $\cos 30^\circ = \frac{b}{c}$

ดังนั้น $c = \frac{4}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4.618$

ตัวอย่าง 19 นักสำรวจต้องการวัดความยาวของแม่น้ำสายหนึ่ง ดังรูป ณ จุด C ตั้งฉากกับจุด A และกำหนดให้ความยาว AC เป็นความยาวของแม่น้ำสายนี้ เมื่อเขาวัดความยาวจากจุด C ไปยังจุด B ที่เขายืนอยู่พบว่ามีความยาว 200 เมตร และ ณ จุด นั้นทำมุมกับจุด A ขนาด 20° (กำหนดให้ $\tan 20^\circ = 0.3640$)

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $\beta = 20^\circ$ และจาก $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$

ดังนั้น $\tan 20^\circ = \dfrac{b}{200}$

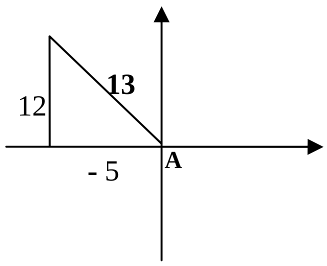
$$b = 200\tan 20^\circ \approx 72.79$$

ดังนั้น แม่น้ำสายนี้มีความยาวประมาณ 72 เมตร

ตัวอย่าง 20 กำหนดให้ $\cot A = -\dfrac{12}{5}$ เมื่อ $0 \le A \le 2\pi$ จงหาค่าของ $\cos A$

<u>วิธีทำ</u> การที่โจทย์กำหนดให้ $\cot A$ เป็นจำนวนลบนั้น แสดงว่าค่าของ sinA และ cosA ต้องมีเครื่องหมายต่างกัน $\left(\because \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$
ดังนั้นมุม A ต้องเป็นมุมในจตุภาคที่ 2 หรือ 4

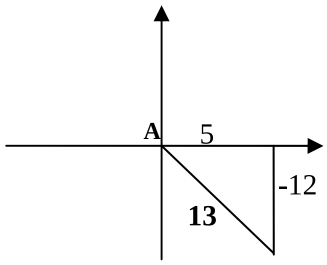
กรณีที่ 1 ถ้ามุม A เป็นมุมในจตุภาคที่ 2



จาก $\cot A = -\dfrac{12}{5}$ ถ้าไม่พิจารณาเครื่องหมายลบ เราสามารถนำข้อมูลดังกล่าว มาเขียนในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังรูป และจากความรู้เกี่ยวกับสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

แต่เนื่องจาก A เป็นมุมที่อยู่ในจตุภาค 2 ดังนั้น ค่าsinA ต้องเป็นบวก และ cosA ต้องเป็นจำนวนลบ ดังนั้น $\cos A = \dfrac{-12}{13}$

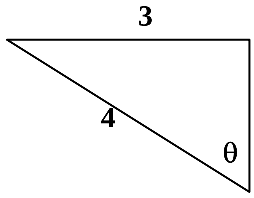
กรณีที่ 2 ถ้ามุม A เป็นมุมในจตุภาคที่ 4

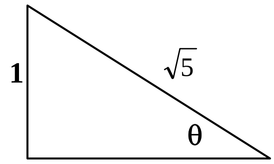


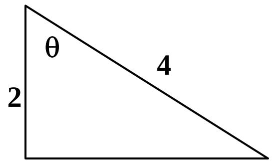
ใช้แนวคิดเช่นเดียวกับกรณีที่ 1 แต่แตกต่างกันตรงที่ ค่าsinA ต้องเป็นลบ และ cosA ต้องเป็นจำนวนบวก ดังนั้น $\cos A = \dfrac{12}{13}$

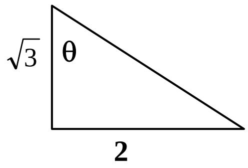
กิจกรรม11

1. จงเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

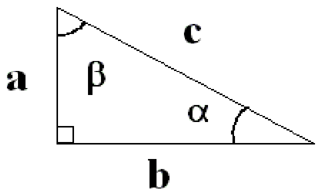
1) 

2) 

3) 

4) 

2. จงใช้รูปสามเหลี่ยมด้านล่างคำนวณหาสิ่งต่าง ๆที่โจทย์แต่ละข้อกำหนดให้



1) $b = 5$, $\alpha = 20^\circ$; จงหา a , c และ β
2) $a = 6$, $\alpha = 40^\circ$; จงหา b , c และ β
3) $b = 4$, $\beta = 20^\circ$; จงหา a , c และα
4) $a = 5$, $b = 3$; จงหา c , α และ β
5) $a = 2$, $c = 5$; จงหา b , α และ β

3. จงหาฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $\sin\theta = \frac{3}{5}$; θ อยู่ในจตุภาคที่ 2
   2) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$; θ อยู่ในจตุภาคที่ 2
   3) $\cot\theta = -\frac{4}{7}$; θ อยู่ในจตุภาคที่ 2
   4) $\sec\theta = -\frac{25}{24}$; $\cot\theta > 0$

4. จงหาค่า $\cos\theta$ ถ้า $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$ และ $\tan\theta < 0$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาว่ามุมที่วัดเป็นเรเดียนต่อไปนี้แต่ละมุมมีขนาดกี่องศา

   1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $-\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{11\pi}{5}$
   4) 4π 5) 3

2. จงหาขนาดของมุมต่อไปนี้ในหน่วยเรเดียน

   1) 300° 2) $-112^\circ\ 40'$ 3) -315°
   4) 880° 5) -500°

3. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมสองมุมกาง 36° และ $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน จงหาขนาดของมุมที่เหลือในหน่วยเรเดียน

4. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้
   1) 150° 2) 120° 3) 315°
   4) –315° 5) 930°

5. จงหาค่าของ
   1) $\frac{3\tan^2 135° - \sec^2 300°}{2\sin 330°}$ 2) $\frac{\tan(-480°) - \sin(-840°)}{\cos(-390°)}$
   3) $\cos(-765°)\sec(-540°) + \tan(-930°)\operatorname{cosec} 495°$
   4) $\cos(-330°)\sin 420° - \tan 225° \cot 675°$

6. ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มี C เป็นมุมฉาก ลากเส้นจาก C มาตั้งฉากกับ AB ที่จุด D ด้าน AC และ BC ยาว 10 และ 12 หน่วยตามลำดับ จงหาค่าของ sinA , cosA , tanA , sinB , cosB , tanB ความยาวด้าน CD และด้าน DB

7. มีจำนวนจริง θ ใดหรือไม่ที่ทำให้ $|\sec\theta| < 1$

8. มีจำนวนจริง θ ใดหรือไม่ที่ $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้วทำให้ $\tan\theta = 5$

9. ถ้า $\sec^2 x + \tan^2 x = \frac{7}{2}$ และ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ จงหาค่าของ cosx

10. ถ้า $\sin\theta = \frac{1}{3}$ และ $\sec\theta < 0$ จงหาค่าของ $\tan\theta$

11. ถ้า $\cot\theta = 5$ และ $\sin\theta < 0$ แล้ว $\cos\theta$ เท่ากับเท่าใด