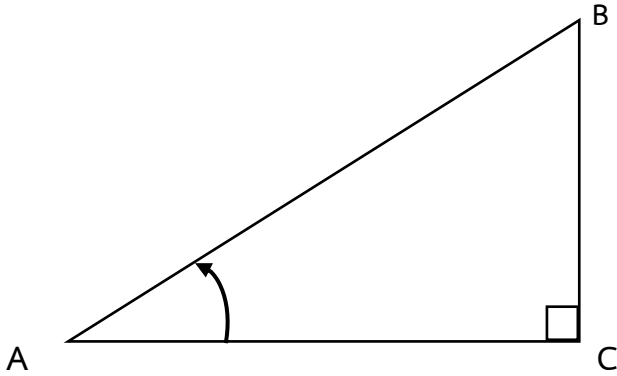
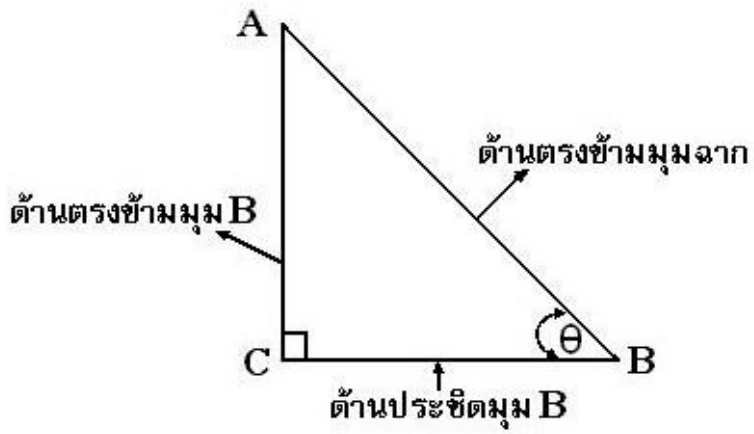


ชั่วโมงที่ 1-2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์

1

1. ทบทวน สามเหลี่ยมมุมฉากและอัตราส่วนตรีโกณมิติเบื้องต้น





$$\sin A = \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องรู้

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

..... (1)

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

.....(2)

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

.....(3)**เพิ่มพูนประสบการณ์ 1**

1. ถ้า $\tan A = \sqrt{3}$ จงหาค่า $\frac{2\sin A + 3\cos A}{3\sin A - 4\cos A}$

2. กำหนดให้ $\sin A + \cos A = k$ จงหาค่า $3\sin A \cos A - 5$

3. กำหนดให้ $\tan A + \cot A = 5$ จงหาค่า $\tan^3 A + \cot^3 A$

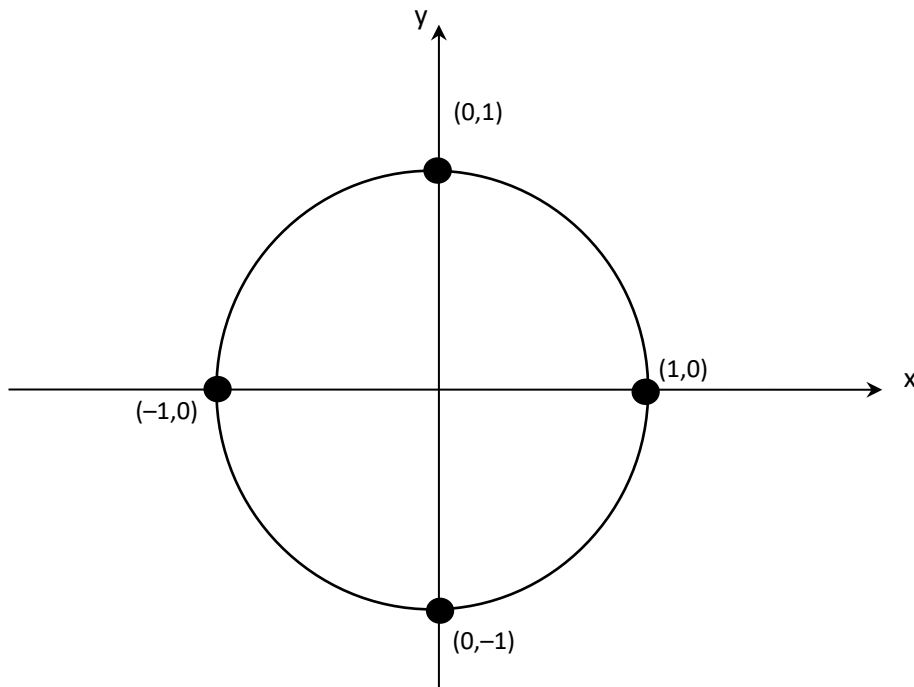
4. กำหนดให้ $\operatorname{cosec} A \sec A = 2$ จงหาค่า $\sin^4 A + \cos^4 A$

4. กำหนดให้ $2\sin A = \frac{1}{\sqrt{3}}\sec A$ จงหาค่า $\sin^6 A + \cos^6 A$

5. จงหาค่าของ $\left(\sin A + \frac{1}{\sin A}\right)^2 + \left(\cos A + \frac{1}{\cos A}\right)^2 - \left(\tan A + \frac{1}{\tan A}\right)^2$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงที่ควรสนใจ

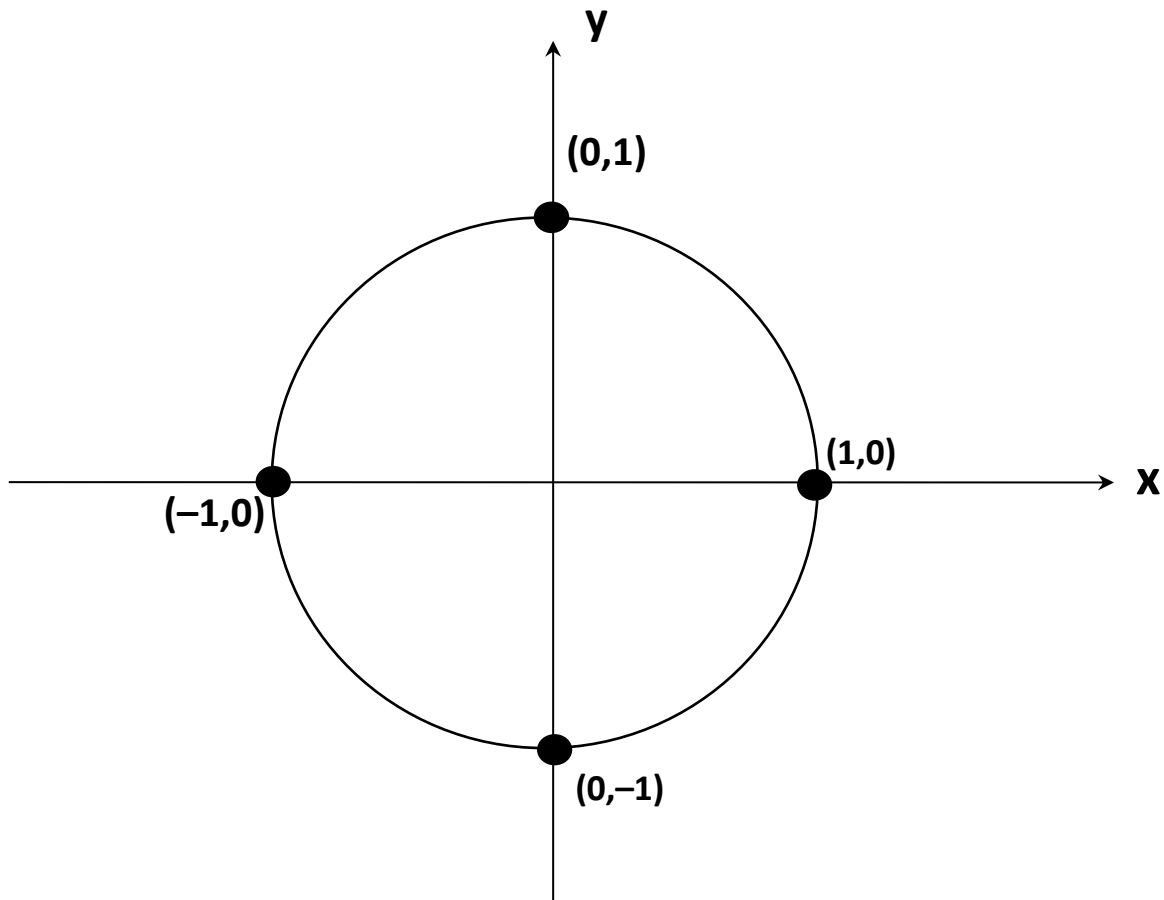
ต่อไปนี้เป็นตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบางจำนวนที่ควรทราบ



องศา (degree)	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°
θ (Radian)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$								
$\cos \theta$								
$\tan \theta$								
$\operatorname{cosec} \theta$								
$\sec \theta$								
$\cot \theta$								

2. วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle) และฟังก์ชันตรีโกณมิติ

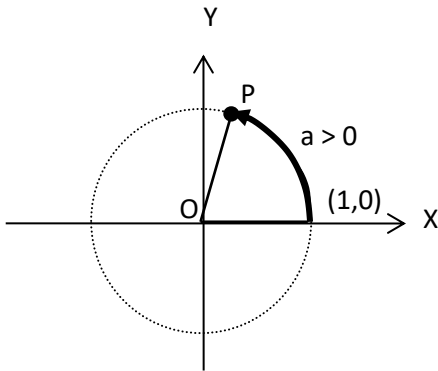
2



ให้ a เป็นความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปยังจุดโดยกำหนดทิศทางดังนี้

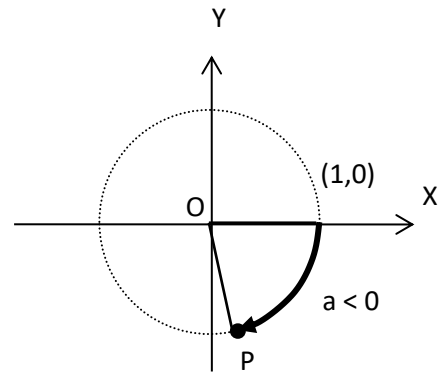
ถ้า $a > 0$

ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

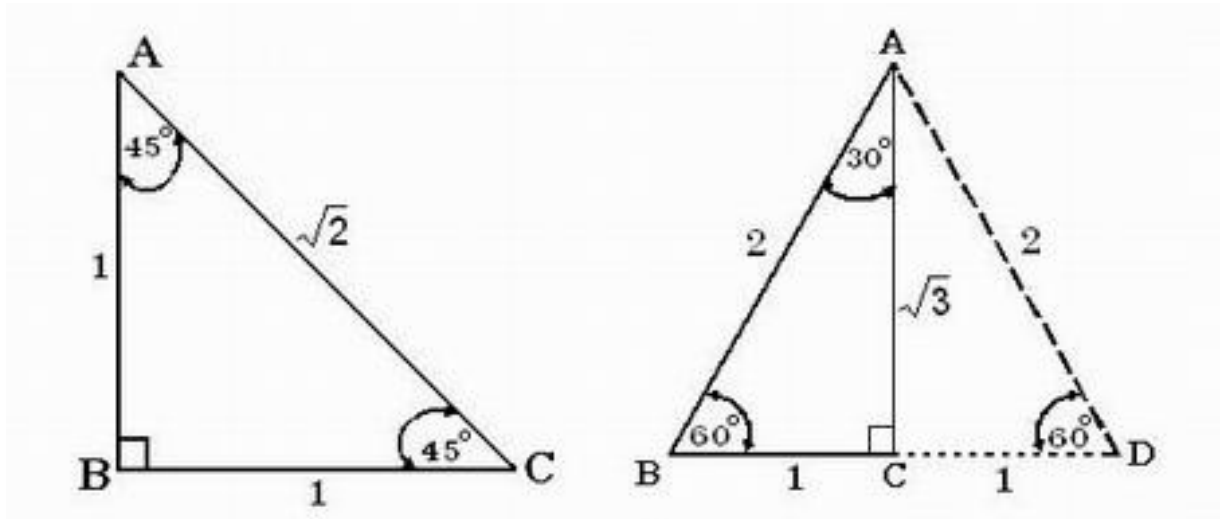


ถ้า $a < 0$

ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

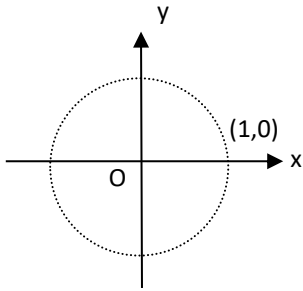


การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

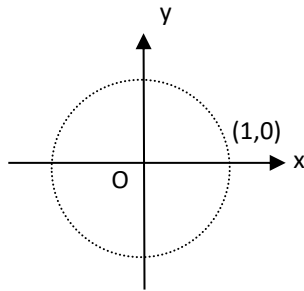


มุม ฟังก์ชัน	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{Cosec} \theta$	$\sqrt{2}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\sec \theta$	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\cot \theta$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

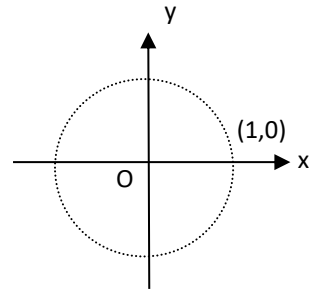
กิจกรรม 1 จุดปลายส่วนโค้ง



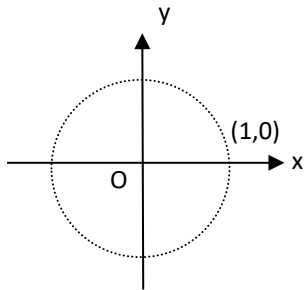
$$P(0) = \dots\dots\dots$$



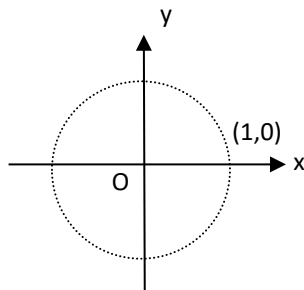
$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$$



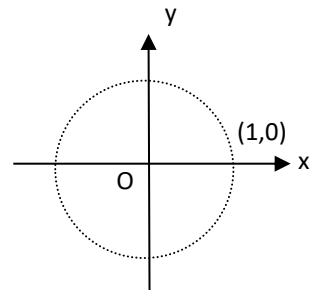
$$P\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \dots\dots\dots$$



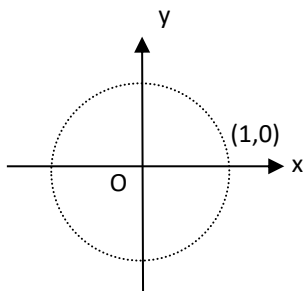
$$P(2\pi) = \dots\dots\dots$$



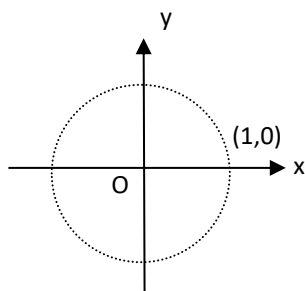
$$P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$$



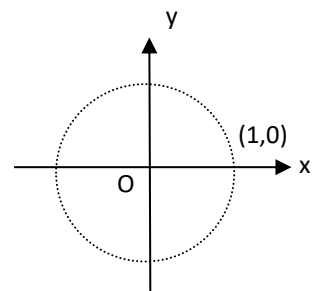
$$P(3\pi) = \dots\dots\dots$$



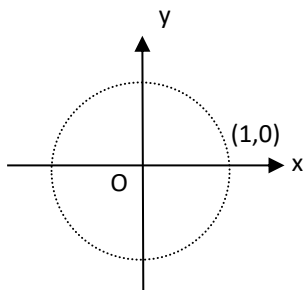
$$P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$$



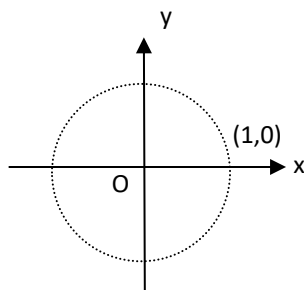
$$P(-\pi) = \dots\dots\dots$$



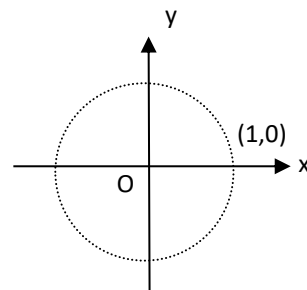
$$P\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \dots\dots\dots$$



$$P(-2\pi) = \dots\dots\dots$$



$$P\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = \dots\dots\dots$$

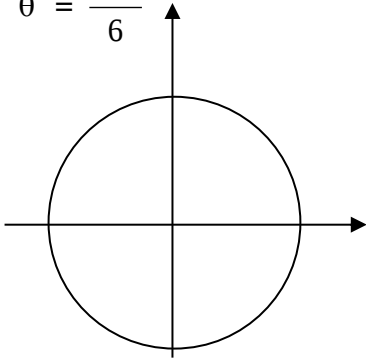


$$P(-3\pi) = \dots\dots\dots$$

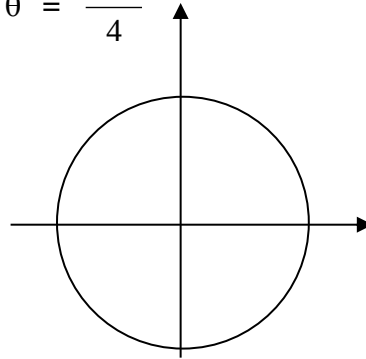
แบบฝึกหัดที่ 1

กำหนดจำนวนจริง θ ให้หาจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยที่กำหนดให้

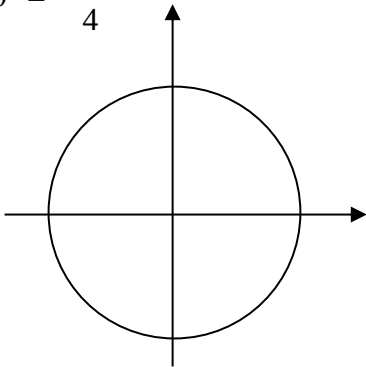
1.) $\theta = \frac{13\pi}{6}$



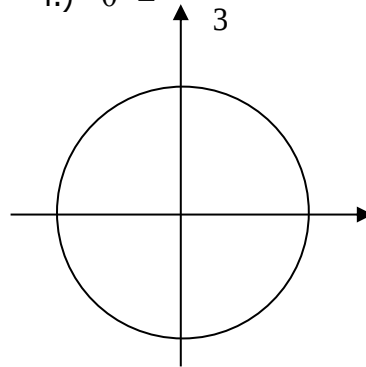
2.) $\theta = \frac{36\pi}{4}$



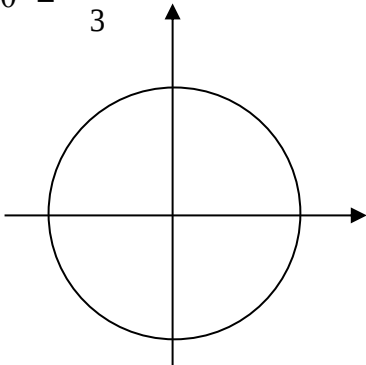
3.) $\theta = \frac{25\pi}{4}$



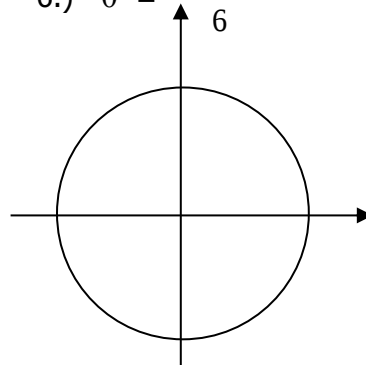
4.) $\theta = \frac{-20\pi}{3}$



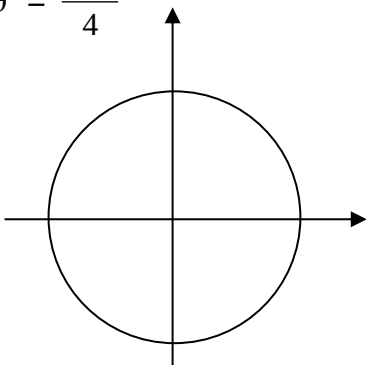
5.) $\theta = \frac{13\pi}{3}$



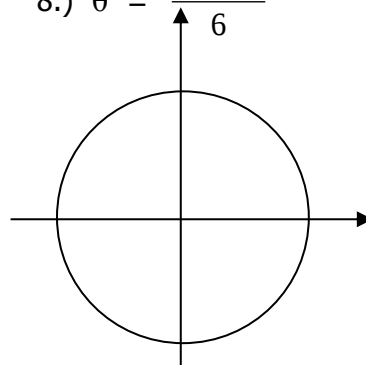
6.) $\theta = \frac{-37\pi}{6}$



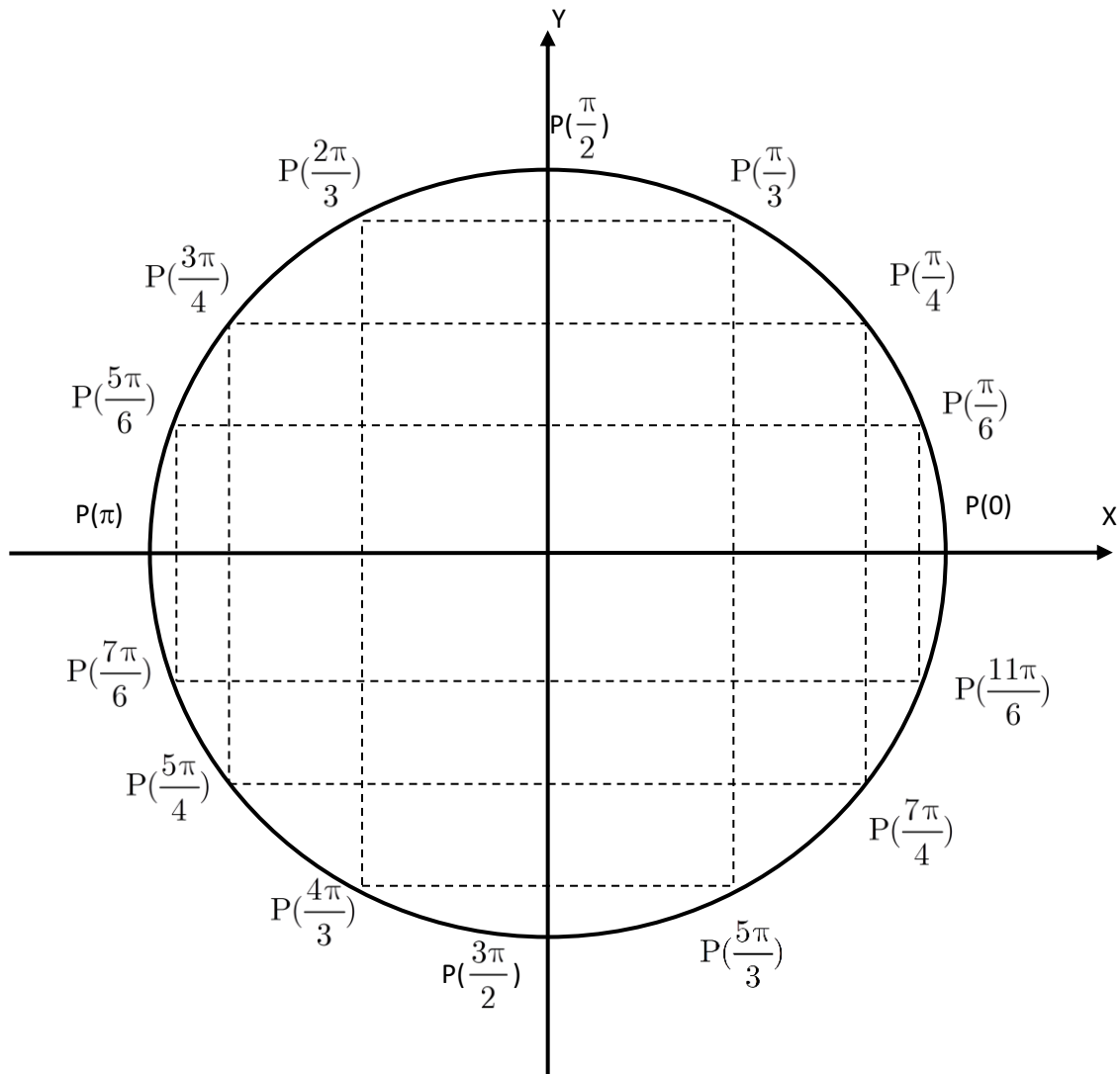
7.) $\theta = \frac{99\pi}{4}$

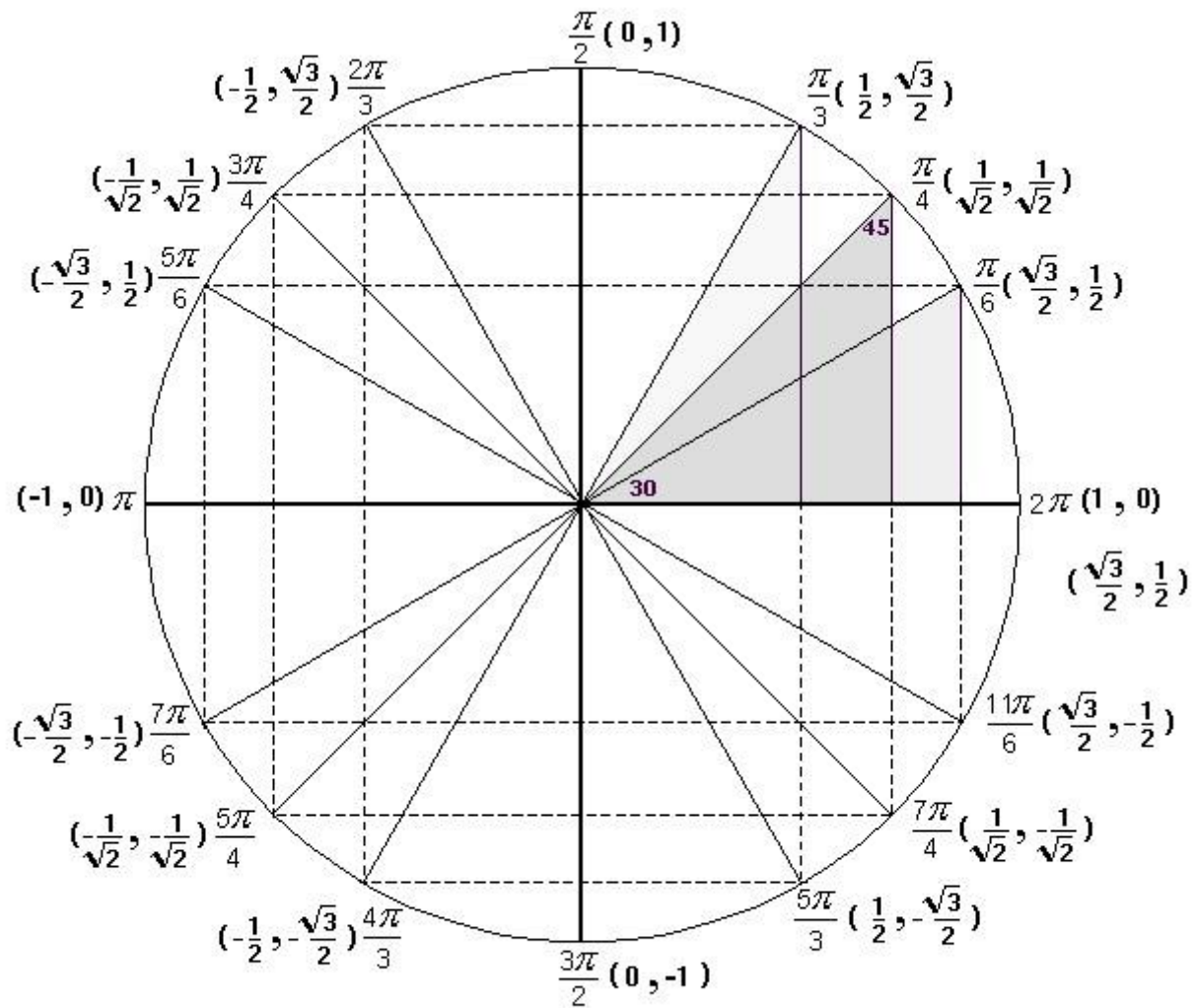


8.) $\theta = \frac{-199\pi}{6}$



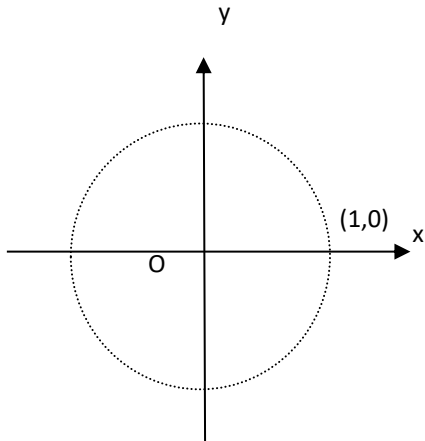
กิจกรรม 2 จงหา $P(\theta) = (x, y)$ จากวงกลมหนึ่งหน่วย





กิจกรรม 3 จงหาค่าของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\cot \theta$, $\sec \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$ เมื่อ $\theta \in \mathbb{R}$ ดังต่อไปนี้

(1) $\theta = \frac{2}{3}\pi$



$$\sin \theta = \dots\dots\dots$$

$$\cos \theta = \dots\dots\dots$$

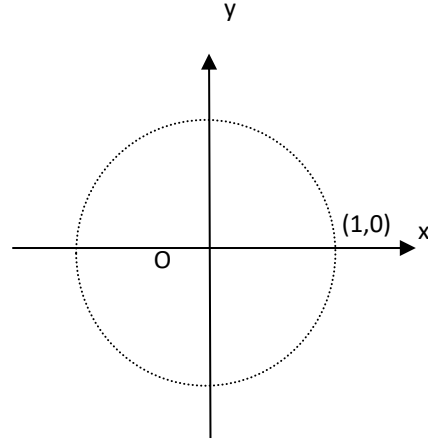
$$\tan \theta = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$$

$$\sec \theta = \dots\dots\dots$$

$$\cot \theta = \dots\dots\dots$$

(2) $\theta = \frac{5}{4}\pi$



$$\sin \theta = \dots\dots\dots$$

$$\cos \theta = \dots\dots\dots$$

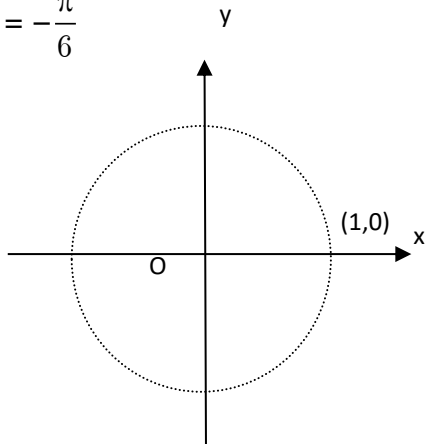
$$\tan \theta = \dots\dots\dots$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$$

$$\sec \theta = \dots\dots\dots$$

$$\cot \theta = \dots\dots\dots$$

(3) $\theta = -\frac{\pi}{6}$



$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

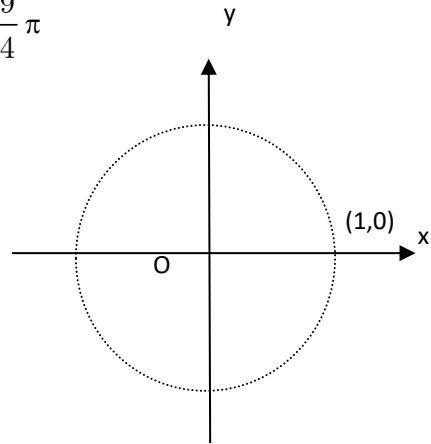
$\tan \theta = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$

$\sec \theta = \dots\dots\dots$

$\cot \theta = \dots\dots\dots$

(4) $\theta = \frac{9}{4}\pi$



$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

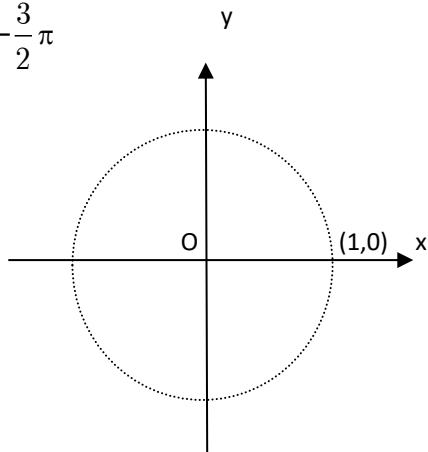
$\tan \theta = \dots\dots\dots$

$\operatorname{cosec} \theta = \dots\dots\dots$

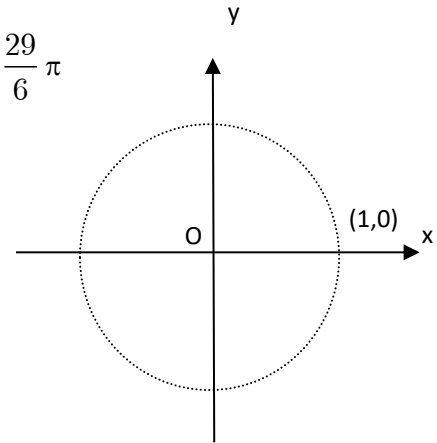
$\sec \theta = \dots\dots\dots$

$\cot \theta = \dots\dots\dots$

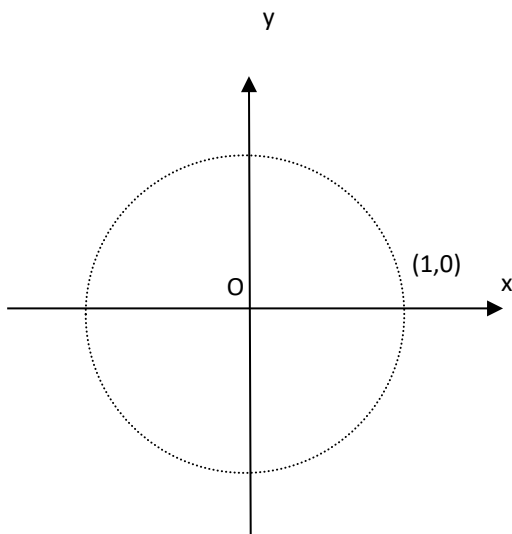
(5) $\theta = -\frac{3}{2}\pi$



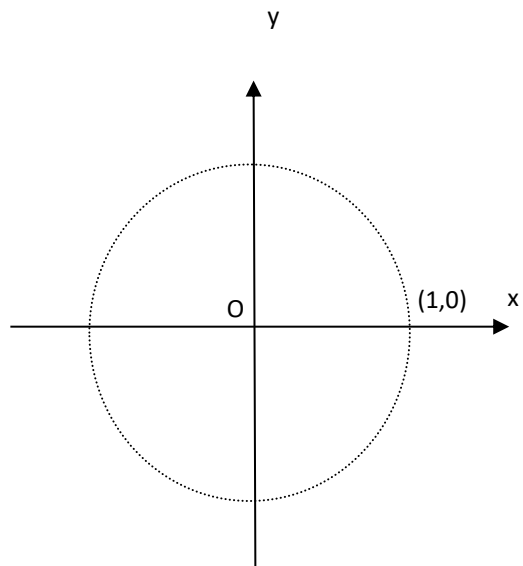
(6) $\theta = -\frac{29}{6}\pi$



(7) $\theta = \frac{21}{4}\pi$

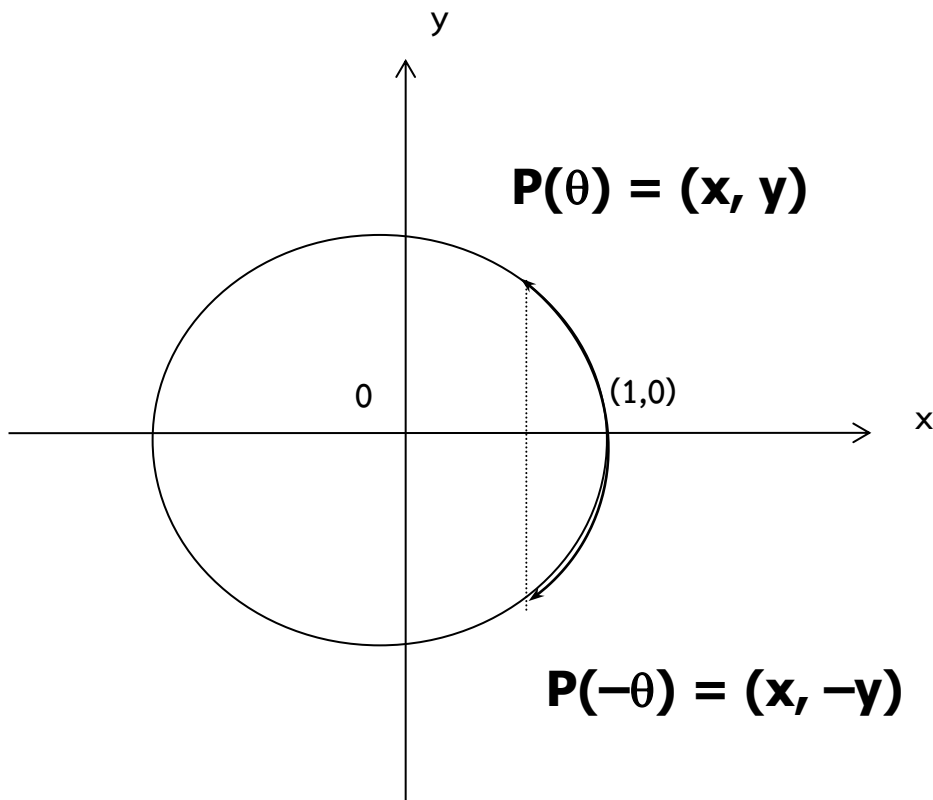


(8) $\theta = -\frac{23}{3}\pi$



การหาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้ากำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $-\theta$ จะเป็นจำนวนจริงลบ การหาค่าของ $\sin(-\theta)$ และ $\cos(-\theta)$ สามารถหาได้จาก $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กันด้วยสูตรที่จะกล่าวต่อไปนี้



จะได้ว่า

$$\sin \theta = y \quad \text{และ} \quad \sin(-\theta) = -y$$

$$\cos \theta = x \quad \text{และ} \quad \cos(-\theta) = x$$

ดังนั้น จงสรุปความสัมพันธ์ระหว่าง $\sin\theta$ กับ $\sin(-\theta)$ และ $\cos\theta$ กับ $\cos(-\theta)$ ได้ดังต่อไปนี้

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

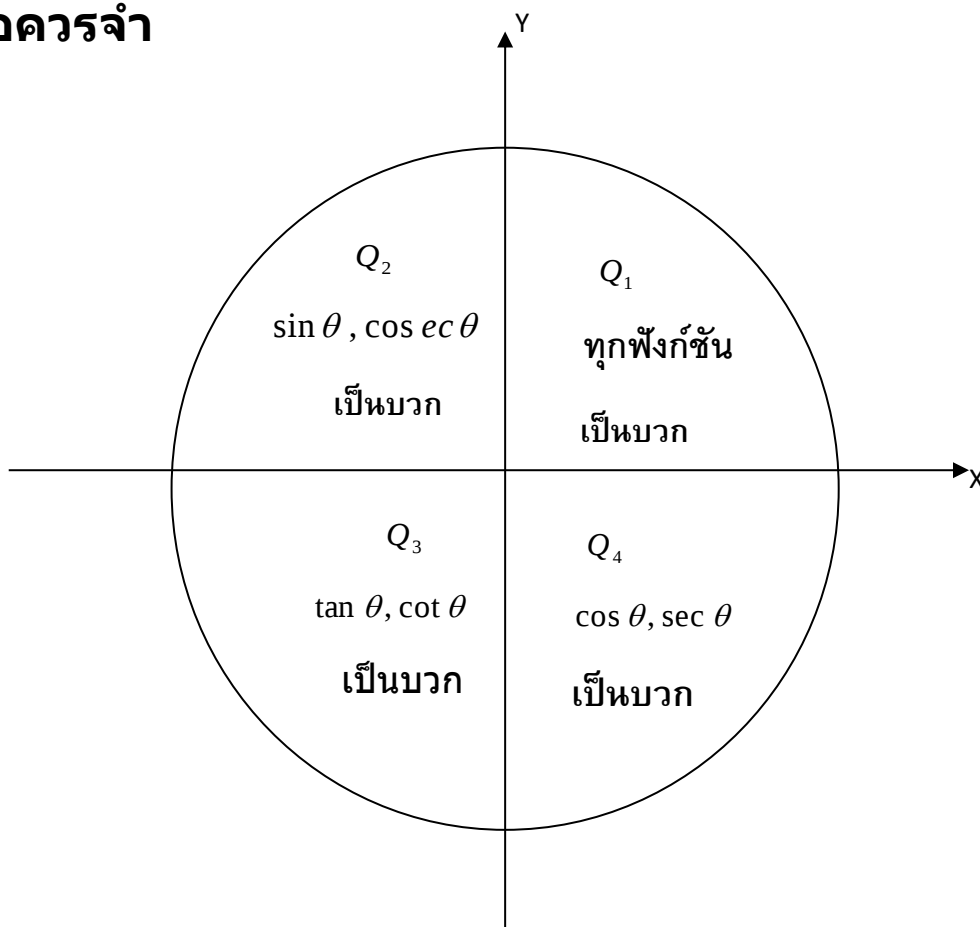
1.) $\sin(\pi - \theta)$

2.) $\cos(\pi + \theta)$

3.) $\cos(2\pi - \theta)$

4.) $\sin(-\theta)$

ข้อควรจำ



3. การยุบมุมและโคฟังก์ชัน ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3

1.

$$5\sec\frac{16\pi}{3}\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right)\tan\frac{59\pi}{6} + \cos(-11\pi)\operatorname{cosec}\frac{45\pi}{4}$$

2.

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$$

3.

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{71\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)-\sec\left(-\frac{29\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\cot\left(\frac{37\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$4. \quad \sin \frac{5\pi}{6} \tan \left(-\frac{19\pi}{3} \right) \cos \left(-\frac{17\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} \sin \left(\frac{79\pi}{6} \right)$$

5.กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$

และ $\sin A = \frac{5}{13}$, $\sec B = -\frac{4}{5}$

จงหาค่าของ

$$\frac{\cos(-5\pi + A)\tan(12\pi - A)\sec(-4\pi - A)}{\cos(21\pi + A)}$$

$$\frac{\operatorname{cosec}(-15\pi + B)\cot(16\pi - B)\sin(2\pi - B)}{\cos(-19\pi + B)}$$

แบบฝึกหัดนี้ต้องลองทำดู

เลือกทำ 2 ข้อ เพื่อประเมินความเข้าใจของตนเอง แล้วอัดคลิปสั้น ๆ เพื่อเตรียมส่งครูผ่านระบบ SDMA

$$5. \quad \cos\left(-\frac{71\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$6. \quad \sin^2\left(-\frac{11\pi}{6}\right) + \cos^2\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$7. \quad \sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\operatorname{cosec}\left(-\frac{11\pi}{3}\right) - 2\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + 4\sin\left(-\frac{47}{2}\right)$$

$$8. \quad \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right)\left(2\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\right)$$

$$9. \quad \sin\frac{5\pi}{6}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$10. \quad \sec\frac{-64\pi}{3}\cos\frac{-131\pi}{4}\tan\frac{143\pi}{6}\operatorname{cosec}\left(\frac{49\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$