

4.5 ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ ผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้หัวข้อ 4.5

เมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยนี้แล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของ $2 \sin \alpha \cos \beta$, $2 \cos \alpha \sin \beta$, $2 \cos \alpha \cos \beta$ และ $2 \sin \alpha \sin \beta$ ได้
2. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมโดยใช้สูตรผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
3. บอกสูตรผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
4. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมโดยใช้สูตรผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากค่าของ $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อนำมาบวก ลบ กัน จะทำให้ได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญดังต่อไปนี้

จาก $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ และ

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ เมื่อนำมาบวกกันจะได้

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

ดังนั้น

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

นอกจากนี้หากนำ $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ มาลบกันจะได้

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

ดังนั้น

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

ในการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ $\cos(\alpha + \beta)$ และ $\cos(\alpha - \beta)$ จะได้

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

และ

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

ตัวอย่าง 16 จากสูตรผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin 6\theta \cdot \sin 4\theta &= \frac{1}{2} (\cos(6\theta - 4\theta) - \cos(6\theta + 4\theta)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta - \cos 10\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos 3\theta \cos \theta &= \frac{1}{2} (\cos(3\theta - \theta) + \cos(3\theta + \theta)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \cos 4\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \sin 3\theta \cos 5\theta &= \frac{1}{2} (\sin(3\theta + 5\theta) + \sin(3\theta - 5\theta)) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 8\theta + \sin(-2\theta)) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 8\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 17 จงหาค่าของ

$$1. \quad 2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ$$

$$3. \quad \cos 45^\circ \cos 15^\circ$$

$$2. \quad 2 \cos 45^\circ \sin 15^\circ$$

$$4. \quad \sin 45^\circ \sin 15^\circ$$

วิธีทำ

1. $2\sin 45^\circ \cos 15^\circ = \sin(45^\circ + 15^\circ) + \sin(45^\circ - 15^\circ)$
 $= \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$
2. $2\cos 45^\circ \sin 15^\circ = \sin(45^\circ + 15^\circ) - \sin(45^\circ - 15^\circ)$
 $= \sin 60^\circ - \sin 30^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$
3. $\cos 45^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ)]$
 $= \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 30^\circ)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$
4. $\sin 45^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos(45^\circ + 15^\circ) - \cos(45^\circ - 15^\circ)]$
 $= \frac{1}{2} (\cos 30^\circ - \cos 60^\circ)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$

กิจกรรม 7

1. จงเปลี่ยนนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่าง
1) $2\sin 4\theta \cdot \sin 2\theta$ 2) $2\sin 4\theta \cdot \cos 2\theta$
3) $\cos 3\theta \cdot \cos 5\theta$ 4) $\sin \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
2. จงหาค่าของ
1) $4\sin 75^\circ \sin 15^\circ + 6\cos 15^\circ \cos 165^\circ$
2) $\sin 70^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \cos 10^\circ$
3) $\sin 40^\circ \sin 80^\circ \sin 160^\circ$

แบบฝึกหัด 4.5(1)

1. จงเขียนผลลัพธ์ในข้อต่อไปนี้ในรูปของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันไซน์ หรือโคไซน์
 - 1) $2 \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$ 2) $2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$ 3) $2 \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$
 - 4) $2 \sin \frac{5\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$ 5) $\sin 105^\circ \cos 40^\circ$ 6) $\cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$
 - 7) $\cos 3\theta \cos 5\theta$ 8) $\sin 7\theta \sin \theta$ 9) $\frac{1}{2} \sin 40^\circ \sin 35^\circ$
 - 10) $\frac{1}{2} \cos 40^\circ \cos 35^\circ$ 11) $4\cos 110^\circ \cos 55^\circ$ 12) $-4\sin 110^\circ \sin 55^\circ$

2. จงหาค่าของ

- 1) $2 \sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 25^\circ$
- 2) $2 \cos 20^\circ \sin 10^\circ + \sin 10^\circ$
- 3) $2 \cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ$
- 4) $\cos 40^\circ - 2 \sin 50^\circ \sin 10^\circ$
- 5) $2 \cos 30^\circ \sin 20^\circ - 2 \cos 40^\circ \sin 10^\circ - 2 \cos 20^\circ \sin 10^\circ$
- 6) $\sin 30^\circ \sin 60^\circ + \sin 10^\circ \sin 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 50^\circ$
- 7) $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ$
- 8) $\cos 6^\circ \cos 66^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ$
- 9) $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$
- 10) $8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

ผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สรุปสูตรผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

นอกจากความสัมพันธ์ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติแล้ว ยังสามารถหาความสัมพันธ์อื่น ๆ ได้ดังนี้

$$\text{สมมติให้ } A = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \text{ และ } B = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \text{ ดังนั้น}$$

$$A + B = \alpha \text{ และ } A - B = \beta \text{ และ}$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

จะได้

$$2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ดังนั้น

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ซึ่งจากการพิสูจน์ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ตัวอย่าง 18 จากสูตรผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้นจะได้ว่า

$$1. \sin 5\theta - \sin 3\theta = 2 \sin \frac{5\theta - 3\theta}{2} \cos \frac{5\theta + 3\theta}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{2\theta}{2} \cos \frac{8\theta}{2}$$

$$= 2 \sin \theta \cos 4\theta$$

$$2. \cos 3\theta + \cos 2\theta = 2 \cos \frac{3\theta + 2\theta}{2} \cos \frac{3\theta - 2\theta}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

ตัวอย่าง 19 จงหาค่าของ

1. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

2. $\cos 105^\circ - \cos 195^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin 75^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos 105^\circ - \cos 195^\circ &= -2 \sin \frac{105^\circ + 195^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 195^\circ}{2} \\ &= -2 \sin 150^\circ \sin(-45^\circ) \\ &= 2 \sin 150^\circ \sin 45^\circ \\ &= 2 \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

กิจกรรม 8

1. จงเปลี่ยนนิพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลคูณ

1) $\sin 4\theta - \sin 2\theta$

2) $\cos 2\theta + \cos 4\theta$

3) $\sin \theta + \sin 3\theta$

4) $\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}$

2. จงหาค่าของ

1) $\sin 105^\circ + \sin 195^\circ$

2) $\sin 105^\circ - \sin 195^\circ$

3) $\cos 195^\circ + \cos 105^\circ$

4) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

5) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

6) $2 \cos 35^\circ \cos 70^\circ - \cos 35^\circ + \cos 15^\circ$

7) $\frac{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ}$

3. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1) $\frac{\cos \theta - \cos 3\theta}{\sin \theta + \sin 3\theta} = \tan \theta$

2) $\frac{\sin 4\theta + \sin 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \tan 6\theta$

3) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \cot \frac{\alpha - \beta}{2}$

4) ถ้า $A + B + C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

แบบฝึกหัด 4.5(2)

1. จงเขียนผลลัพธ์ในข้อต่อไปนี้เป็นรูปของผลคูณของฟังก์ชันไซน์ หรือโคไซน์

- 1) $\sin 80^\circ + \sin 20^\circ$
- 2) $\sin 50^\circ - \sin 20^\circ$
- 3) $\cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}$
- 4) $\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$
- 5) $\sin 4\theta + \sin 2\theta$
- 6) $\sin 4\theta - \sin 6\theta$
- 7) $\cos 2\theta - \cos 4\theta$
- 8) $\cos 3\theta + \cos 8\theta$

2. จงหาค่าของ

- 1) $\cos 465^\circ + \cos 165^\circ$
- 2) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$
- 3) $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$
- 4) $\cos \theta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right)$
- 5) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$
- 6) $\frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}$
- 7) $\frac{\cos 20^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 20^\circ}$
- 8) $2 \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{10\pi}{11}$
- 9) $\sin^2 A + \sin^2 (60^\circ + A) + \sin^2 (60^\circ - A)$

3. ถ้า $\sin A = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A)$

4. ถ้า $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ จงหาค่าของ $\cos \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right)$

5. ถ้า ถ้า $A + B + C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

- 1) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$
- 2) $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = -4 \sin A \cos B \cos C$
- 3) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- 4) $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1$
- 5) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

Touch-Tone phone

ปุ่มโทรศัพท์ที่เราใช้กันอยู่ในปัจจุบัน ในแต่ละปุ่มจะกำหนดเสียงซึ่งเกิดจากผลบวกของคลื่นความถี่สูง และคลื่นความถี่ต่ำ โดยสมการคลื่นความถี่สูง คือ $y = \sin[2\pi ht]$ และ สมการคลื่นความถี่ต่ำ คือ $y = \sin[2\pi lt]$ โดยกำหนดให้ l และ h คือ คลื่นความถี่ต่ำ และสูง(รอบต่อวินาที) ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้ใช้กดปุ่มหมายเลข 7 จะประกอบด้วยคลื่นความถี่สูงขนาด $h = 1,209$ รอบต่อวินาที และ คลื่นความถี่ต่ำ $l = 852$ รอบต่อวินาที และสมการคลื่นความถี่ของปุ่มหมายเลข 7 คือ

$$y = \sin[2\pi(1209)t] + \sin[2\pi(852)t]$$

คำถาม นักเรียนคิดว่าค่าสูงสุดของ y เมื่อกดปุ่ม 7 เป็นเท่าใด