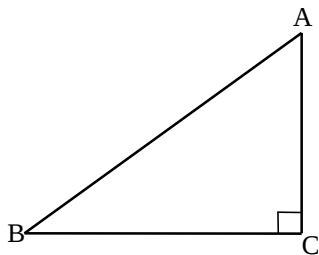


บทที่ 1

ฟังก์ชัน
ตรีโกณมิติ

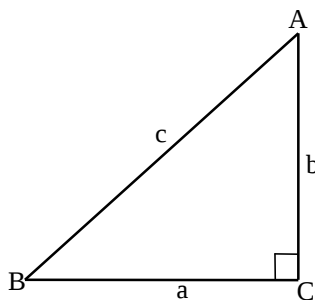
1. ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป็นเรื่องที่สำคัญมากที่ใช้ในการนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติ ดังนี้



ด้าน	ด้านของมุม A	ด้านของมุม B
ABAC	ด้านประชิดมุม A (ชิด)	ด้านประชิดมุม A (ชิด)
BC	ด้านตรงข้ามมุม A (ข้าม)	ด้านตรงข้ามมุม A (ข้าม)
AB	ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)	ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ อัตราส่วนของความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



จากรูป เราจะเรียก c ว่า ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

b ว่า ความยาวด้านตรงข้ามมุม B

และ เรียก a ว่า ความยาวด้านประชิดมุม B

และจากรูป เมื่อเรานำความยาวของทั้งสามด้านมาหาอัตราส่วนเราจะเรียกอัตรส่วนต่าง ๆ ต่อไปนี้

ซึ่งต่อไปจะเรียกว่า **อัตราส่วนตรีโกณมิติ** ซึ่งมีดังนี้

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \tan B = \frac{b}{a}$$

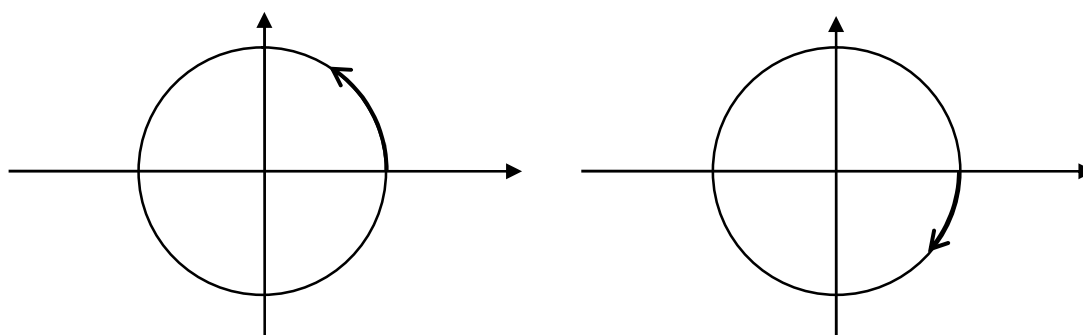
$$\cot B = \frac{a}{b}, \quad \sec B = \frac{1}{\cos B}, \quad \operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B}$$

The Expert

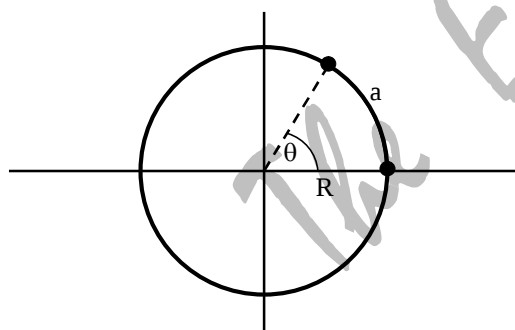
Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. การวัดมุม

การวัดมุมทางตรีโกณมิติเราจะนิยมวัดมุมใน 2 ทิศทาง คือ **วัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกา** และ **การวัดมุมในทิศตามเข็มนาฬิกา** ซึ่งการวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกาเราจะได้มุมเป็นบวก และการวัดมุมตามเข็มนาฬิกาจะได้มุมเป็นลบ ดังรูป



ในการวัดมุมนั้นเราจะกำหนดให้หน่วยของมุมที่นิยมใช้กัน 2 แบบ คือ องศา และ เรเดียน โดยที่ 180° เท่ากับ π เรเดียน ในหน่วยของการวัดมุมนั้นเราจะเน้นไปที่การศึกษาหน่วยของมุมที่เป็นเรเดียนเป็นหลัก นอกจากนี้ยังมีหน่วยของมุมที่นิยมใช้วัดกันในประเทศอังกฤษอยู่อีก 2 หน่วย คือ ลิปดา และ ฟิลิปดา โดยที่ 1 องศา เท่ากับ 60 ลิปดา ($1^\circ = 60'$) และ 1 ลิปดา เท่ากับ 60 ฟิลิปดา ($1' = 60''$)



จากรูป จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่กวาดไปกับความยาวตามส่วนโค้ง ดังนี้

$$\theta = \frac{a}{R}$$

เมื่อ	θ	แทน	มุมที่วัดจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมีหน่วยเป็นเรเดียน
	a	แทน	ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
และ	r	แทน	รัศมีของวงกลม

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

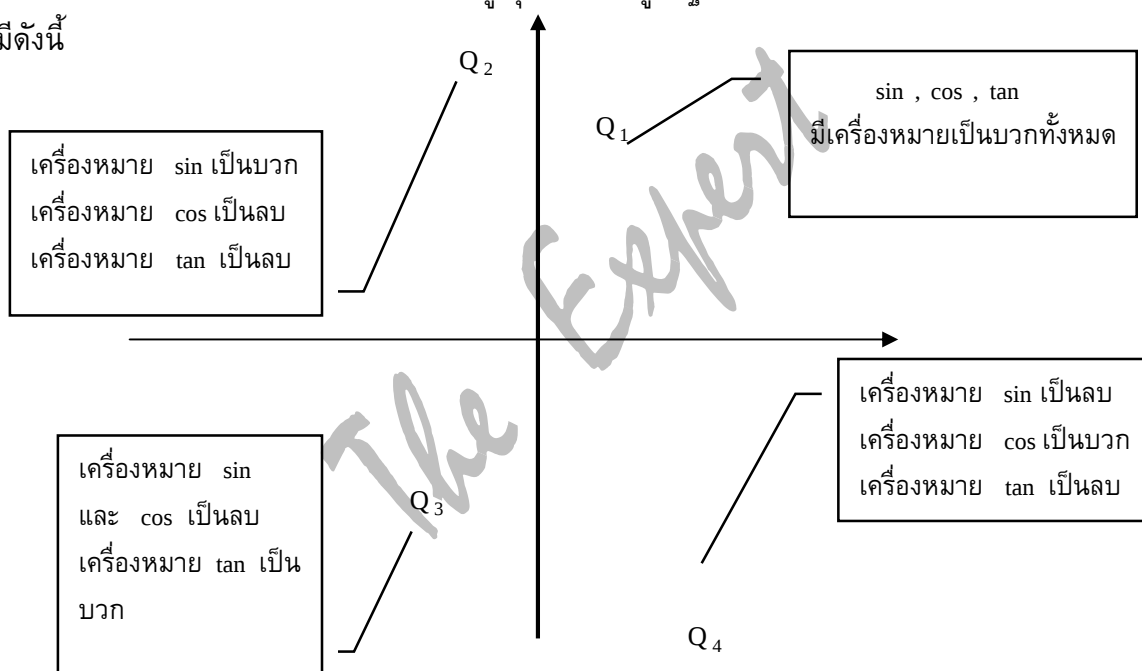
3. ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเบื้องต้น

มุม	0°	30°	60°	90°	180°	45°	270°	360°
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	หาค่าไม่ได้	0	1	หาค่าไม่ได้	0

จากตาราง มุมที่อยู่บนแกน X ได้แก่ $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \dots, (n-1)180^\circ$

และมุมที่อยู่บนแกน Y ได้แก่ $90^\circ, 270^\circ, \dots, 90^\circ(2n-1)$

การนำค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้เพื่อให้เกิดผลสูงสุดเราจะต้องรู้พื้นฐานในส่วนของการหาค่าของเครื่องหมายประจำควอดรันต์ก่อน ซึ่งมีดังนี้



ตารางแสดงอัตราส่วนของสามเหลี่ยมมุมฉาก

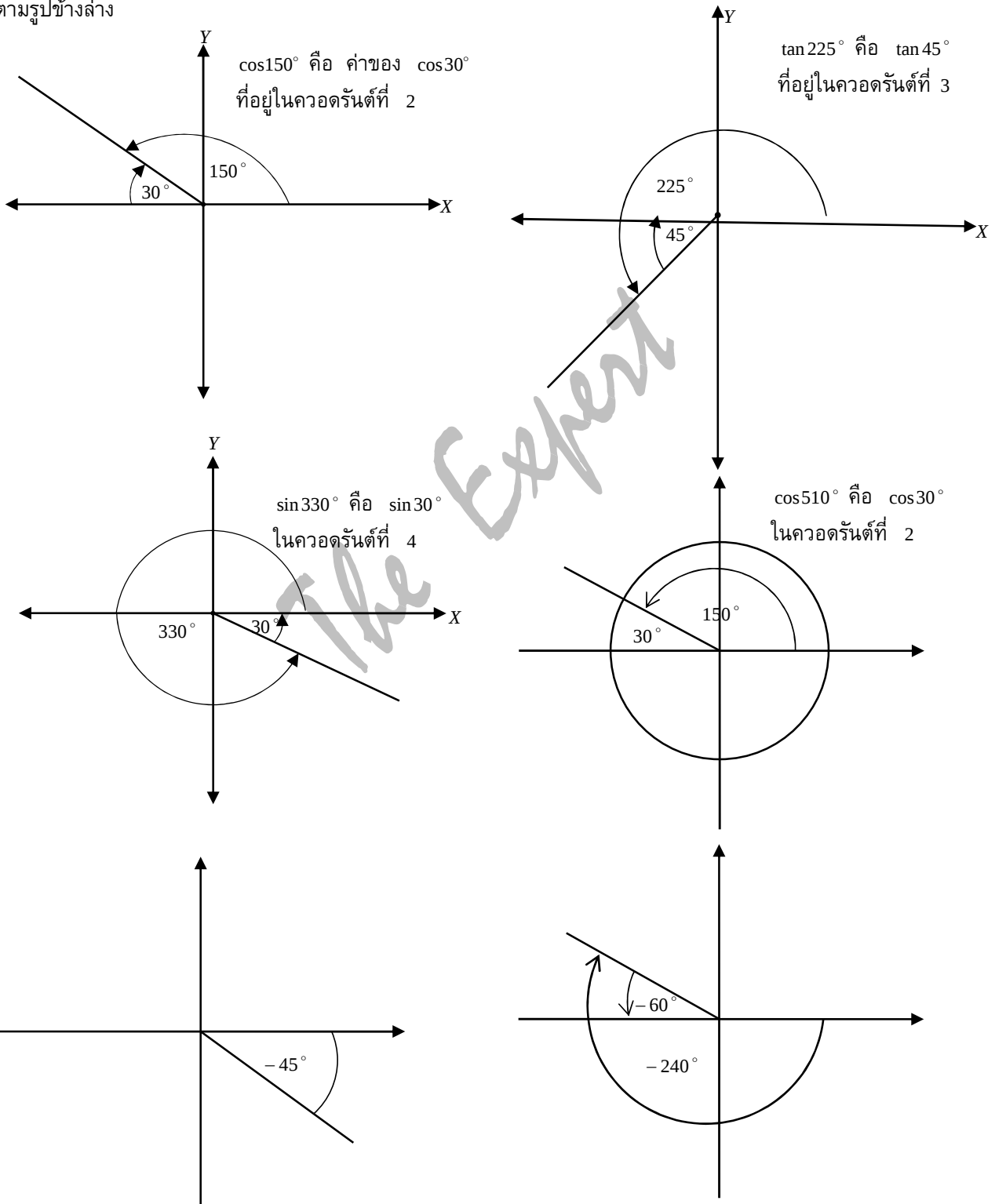
a หรือ b	a หรือ b	c
3	4	5
8	6	10
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
10	24	26

ความของด้าน

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

4. การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในกรณีที่หาค่าของมุมที่มุมมากกว่า 90° ให้เราใช้การวาดรูปวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย แล้วลากเส้นโค้งไปชนมุมที่อยู่ตามควอดรนต์ต่าง ๆ ตามที่เราจะหา หลังจากนั้นก็ให้วัดมุมจากแกน x ในทิศทางเข็มนาฬิกาเราก็จะได้มุมที่ต้องการหลังจากนั้นก็ให้เราแทนเครื่องหมายตามควอดรนต์ที่มุมที่เราวัดได้อยู่ โดยอาศัยเครื่องหมายตามรูปข้างล่าง



Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

5. โคฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ถ้า $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ แล้ว ความสัมพันธ์แบบนี้จะเรียกว่า โค - ฟังก์ชัน

ซึ่งเราสังเกตได้จากความสัมพันธ์ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่กล่าวว่า

“ ถ้ามุมสองมุมรวมกันได้ 90° แล้ว ค่า $\sin$ ของอีกมุมหนึ่งจะเท่ากับค่า $\cos$ ของอีกมุมหนึ่ง “

และนอกจากนี้ยังมีอีกสองคู่ คือ $\tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$ และ $\sec \theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$

นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์อีกแบบที่ควรทราบก็คือ

$$1. \quad -1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad \text{และ} \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$2. \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$3. \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$4. \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$5. \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$6. \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$7. \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่มุมมากกว่า $\frac{\pi}{2}$ ได้แก่ $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \dots$

สำหรับการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่มุมมากกว่า $\frac{\pi}{2}$ นั้นเราจะต้องพยายามแยกมุมที่นำมาให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$1. \quad \sin A = \sin(\alpha \pm \theta) \quad \text{โดยที่} \quad A > \frac{\pi}{2}$$

$$\text{และ ให้ } \theta = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad \text{และ} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$$

$$\text{หรืออาจจะทำให้มุม } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \quad \text{และ} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$$

$$2. \quad \cos A = \cos(\theta \pm \alpha) \quad \text{โดยที่} \quad A > \frac{\pi}{2}$$

$$\text{และ ให้ } \theta = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad \text{และ} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$$

$$\text{หรือน้องอาจจะทำให้มุม } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \quad \text{และ} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$$

การแก้ปัญหาเมื่อมุมมากกว่า $\frac{\pi}{2}$ ให้ใช้สูตรดังต่อไปนี้มาช่วยในการแก้ปัญหาได้ดังนี้

$$1. \quad \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

PB1 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

ก. $\sin 240^\circ$

ข. $\cos 120^\circ$

ค. $\tan 315^\circ$

ง. $\cos 210^\circ$

PB2 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

ก. $\operatorname{cosec}(-300^\circ)$

ข. $\sec(-510^\circ)$

ค. $\cot(945^\circ)$

ง. $\sin(-210^\circ)$

PB3 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

ก. $\sin 852^\circ \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \sin(-555^\circ) + \tan(155^\circ) \tan 225^\circ$

ข. $\frac{3 \cos(-127^\circ) - 2 \sin 233^\circ}{4 \sin 127^\circ + 6 \cos 233^\circ}$

ค. $\frac{\sec^2(-840^\circ) - \operatorname{cosec}^2(-480^\circ)}{\cot^2(-930^\circ)}$

ง. $\cos^2(-225^\circ) \sin(150^\circ) \sec^2(210^\circ)$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

PB4 จงตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

ก. กำหนด $\tan \theta = \frac{3}{4}$ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\cos \theta$, $\cot \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$

ข. กำหนดให้ $\tan \theta < 0$ และ $\cos \theta = \frac{1}{5}$

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} \theta$, $\cot \theta$

ค. ถ้า $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ และ $\sin \theta = -\frac{1}{2}$

จงหาค่าของ $\tan^2 \theta - 2\cos^2 \theta$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

PB5 จงตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

ก. ถ้า $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

จงหาค่าของ $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta$

ข. ถ้า $\cot \theta = 3$ และ $\sin \theta < 0$ แล้ว $\cos \theta$ เท่ากับเท่าใด

ค. กำหนดให้ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ และ $3 \tan \alpha = 4$

จงหาค่าของ $2 \cot \alpha - 5 \cos \alpha + \sin \alpha$

ง. กำหนดให้ $\tan \theta = \frac{3}{4}$ เมื่อ $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

จงหาค่าของ $5 \sin \theta + 10 \cos \theta$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

PB6 ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{7\pi}{6}$ เท่ากับข้อใด

1. 0
2. 1
3. 2
4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

PB7 ถ้า $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และ $\cot \theta = \frac{5}{12}$ แล้วข้อใดถูก

1. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{17}{13}$
2. $\sec \theta + \cot \theta = \frac{131}{60}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

3. $\operatorname{cosec} \theta - \tan \theta = \frac{209}{60}$

4. $\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta = \frac{3}{2}$

PB8 กำหนด $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ และ $4 \tan \theta = 7$ จงหาค่าของ $\frac{3\sin \theta - 2\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$

1. $1\frac{1}{11}$

2. $11\frac{1}{11}$

3. $2\frac{1}{11}$

4. $1\frac{2}{11}$

PB9 ถ้า $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และ $\tan \theta = \frac{12}{5}$ แล้ว ข้อใดถูกต้อง

1. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{13}$

2. $\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta = -\frac{2}{3}$

3. $\sin \theta - \sec \theta = \frac{99}{65}$

4. $\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta = -\frac{91}{60}$

PB10 ถ้า $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ และ $\sin \theta < 0$ แล้ว $\frac{5 \sin \theta + 3 \cot \theta}{2 \tan \theta}$ มีค่าเท่าใด

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

1. $-\frac{2}{3}$
2. $-\frac{3}{2}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{2}{3}$

PB11 ถ้า $0 < A < 90^\circ$, $\cot A = \frac{8}{15}$ แล้ว $\sin A + \cos A + \tan A$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{440}{136}$
2. $\frac{439}{136}$
3. $\frac{432}{136}$
4. $\frac{430}{136}$

PB12 กำหนด $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

ค่าของ $\frac{\sin(\theta - 13\pi) + \cos(\theta - 20\pi)}{\tan(19\pi + \theta) - \sin 15\pi}$ ตรงกับข้อใด

1. $-\frac{21}{20}$
2. $\frac{21}{20}$
3. $-\frac{3}{20}$
4. $\frac{7}{20}$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB13 กำหนดจุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

และ θ เป็นความยาวส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปยังจุด P และจุด P นั้นอยู่บนเส้นตรง $2x + 1 = 0$

ค่าของ $\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ ตรงกับข้อใด เมื่อ $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
4. $2\sqrt{3}$

PB14 ค่าของ $\cos\left(-\frac{315\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{51\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{214\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{29\pi}{6}\right)$ คือข้อใด

1. 1
2. $2\frac{1}{2}$
3. $3\frac{1}{2}$
4. 4

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB15 ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\sin 720^\circ \cot 45^\circ + \sec 60^\circ \cos 360^\circ - 2 \cos 60^\circ \sin 90^\circ = 1$
2. $\sin \frac{\pi}{16} \sin \frac{7\pi}{16} \sin \frac{23\pi}{16} > 0$
3. ถ้า $\sin \frac{\pi}{10} = 0.31$, $\cos \frac{\pi}{10} = 0.95$ แล้ว $\sin \frac{11\pi}{10} = -0.31$ และ $\cos \frac{11\pi}{10} = -0.95$
4. ถ้า $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ แล้ว $0 \leq \cos x \leq 1$

PB16 ค่าของ $\frac{\sin \frac{7\pi}{9}}{\sin \frac{2\pi}{9}} + \frac{\cot \frac{13\pi}{7}}{\cot \frac{\pi}{7}}$ เท่ากับข้อใด

1. -2
2. -1
3. 0
4. 1

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB17 กำหนด $A = \{x \mid \cos 3x \geq 3\}$, $B = \{x \mid 3\operatorname{cosec} x - 1 = 0\}$, $C = \{x \mid \cot x + \operatorname{cosec} x = 0\}$

และ $D = \{x \mid 3\sin x + 5 = 2\}$ ใน 4 เซตที่กำหนดข้างต้นมีที่เป็นเซตว่างอยู่ที่เซต

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

PB18 $\sin 600^\circ \cos 330^\circ + \cos 120^\circ \sin 150^\circ$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $-\sin 30^\circ$
2. $\sin 180^\circ$
3. $\cos 180^\circ$
4. $\cos(-150^\circ)$

PB19 ค่าของ $\frac{\cos 300^\circ \tan 225^\circ - \sec 315^\circ \operatorname{cosec} 495^\circ}{\sin 300^\circ \cos 150^\circ}$ เท่ากับข้อใด

1. 2
2. -2
3. 3
4. -3

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB20 ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $3\sin\frac{\pi}{2} + \cot\frac{3\pi}{2} 2\cos\pi$

1. $2\sin 270^\circ - \cos 90^\circ + 3\tan 180^\circ$
2. $3\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + \tan 360^\circ$
3. $2\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{6}$
4. $5\sin 270^\circ + 3\cot 270^\circ + 2\cos 180^\circ$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

6. เวกลักษณะของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญมีดังต่อไปนี้

1. สำหรับจำนวนจริง θ แล้ว $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
2. สำหรับจำนวนจริง θ ซึ่ง $\sin \theta \neq 0$ แล้ว $\sin \theta \operatorname{cosec} \theta = 1$
3. สำหรับจำนวนจริง θ ซึ่ง $\cos \theta \neq 0$ แล้ว $\cos \theta \sec \theta = 1$
4. สำหรับจำนวนจริง θ ซึ่ง $\sin \theta \neq 0$ และ $\cos \theta \neq 0$ แล้ว $\tan \theta \cot \theta = 1$
5. สำหรับจำนวนจริง θ ซึ่ง $\cos \theta \neq 0$ แล้ว $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$
6. สำหรับจำนวนจริง θ ซึ่ง $\sin \theta \neq 0$ แล้ว $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$

เอกลักษณ์จะมีประโยชน์อย่างมากที่ช่วยในการย่ออัตราส่วนตรีโกณเพื่อหาค่าของฟังก์ชันบางตัว ดังนั้นถ้ามีฟังก์ชันตรีโกณหลายตัวให้ย่อเหลือตัวเดียวในรูปของ $\sin$ หรือ $\cos$ หรือ $\tan$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

7. การอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง

การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางนั้นทั้งหน่วยเรเดียนและองศา

ในกรณีที่ค่าของมุมที่ต้องการอ่านค่าไม่ปรากฏในตาราง ให้ใช้ค่าของมุมที่อยู่รอบข้างเทียบบัญญัติไตรยางค์หาค่าของมุมที่ต้องการ

เช่น ถ้าต้องการหาค่าของ $\sin 35^\circ 12'$ ซึ่งเมื่อเปิดดูค่าจากตารางจะไม่มีค่าปรากฏ ดังนั้น จะต้องใช้วิธีเทียบบัญญัติไตรยางค์ในการหาค่าของ $\sin 35^\circ 12'$ ซึ่งทำได้ดังนี้

จากตารางเรารู้ค่าของ $\sin 35^\circ 10' = 0.5760$ และ $\sin 35^\circ 20' = 0.5783$

ซึ่งจะเห็นว่า $\sin 35^\circ 12'$ อยู่ระหว่าง $\sin 35^\circ 10'$ และ $\sin 35^\circ 20'$ การหาค่า $\sin 35^\circ 12'$ ทำได้ดังนี้

มุมเพิ่ม $(20' - 10')$ ค่าของ sine เพิ่มขึ้น $(0.5783 - 0.5760)$

ถ้ามุมเพิ่ม $(12' - 10')$ ค่าของ sine จะเพิ่ม $\frac{(0.0023)(2)}{10} = 0.00046$

ดังนั้น ค่าของ $\sin 35^\circ 12'$ เท่ากับ $0.5760 + 0.00046 = 0.57646$

★ ในควอดรนต์ที่ 1 ค่าของ sine และค่าของ tangent จะเพิ่มขึ้นตามค่าของมุม ดังนั้นในการเทียบบัญญัติไตรยางค์เราจะต้องนำค่าที่ได้บวกกับค่าของมุมที่น้อยกว่าเสมอ

★ ในควอดรนต์ที่ 1 ค่าของ cosine และค่าของ cot จะลดลงตามค่าของมุมที่เพิ่มขึ้น ดังนั้นในการเทียบบัญญัติไตรยางค์เราจะต้องนำค่าที่ได้ลบกับค่าของมุมที่น้อยกว่าเสมอ

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB1 จงตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

ก. จงหาค่าของ $\cos 0.7401$ เมื่อกำหนดให้ $\cos 0.7389 = 0.7392$ และ $\cos 0.7418 = 0.7373$

ข. จงหาค่าของ θ จาก $\tan \theta = 4.3300$ เมื่อ $4.2747 = \tan 1.3410$ และ $4.3315 = \tan 1.3439$

ค. จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\tan 27^\circ 10' = 0.5132$ และ $\tan 27^\circ 20' = 0.5169$ ค่าของ $\tan 152^\circ 45'$ มีค่าเท่าใด

The Expert

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB2 จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\cos 43^\circ = 0.7314$ และ $\cos 43^\circ 10' = 0.7294$ ถ้า $\sin \theta = 0.7310$

และ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ θ เท่ากับข้อใด

1. $42^\circ 58'$
2. $43^\circ 2'$
3. $46^\circ 58'$
4. $47^\circ 2'$

PB3 จงหาค่าของ $\cos 5^\circ$ เมื่อกำหนด $\cos 1.2828 = 0.2840$ และ $\cos 1.2857 = 0.2812$

1. 0.2834
2. 0.2835
3. 0.2836
4. 0.2837

PB4 กำหนดให้ $\operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta = \frac{7}{2}$ แล้ว $\sin \theta$ ตรงกับข้อใด

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\frac{3}{2}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB5 กำหนดให้ $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{7}{2}$ และ $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

ค่าของ $\cos \theta$ เท่ากับข้อใด

1. $-\frac{2}{3}$
2. $-\frac{1}{3}$
3. -1
4. $-\frac{3}{4}$

PB6 กำหนด $0 \leq \theta \leq 2\pi$ และ $2\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta = 3$

แล้วค่า θ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{\pi}{2}$
2. $\frac{\pi}{3}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{6}$

PB7 ถ้า $1 + 2\sin \theta = 3\operatorname{cosec} \theta$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ แล้ว θ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 0
2. $\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. $\frac{\pi}{4}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

8. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เนื่องจากว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็น ฟังก์ชันคาบ ซึ่งคาบเท่ากับ 2π

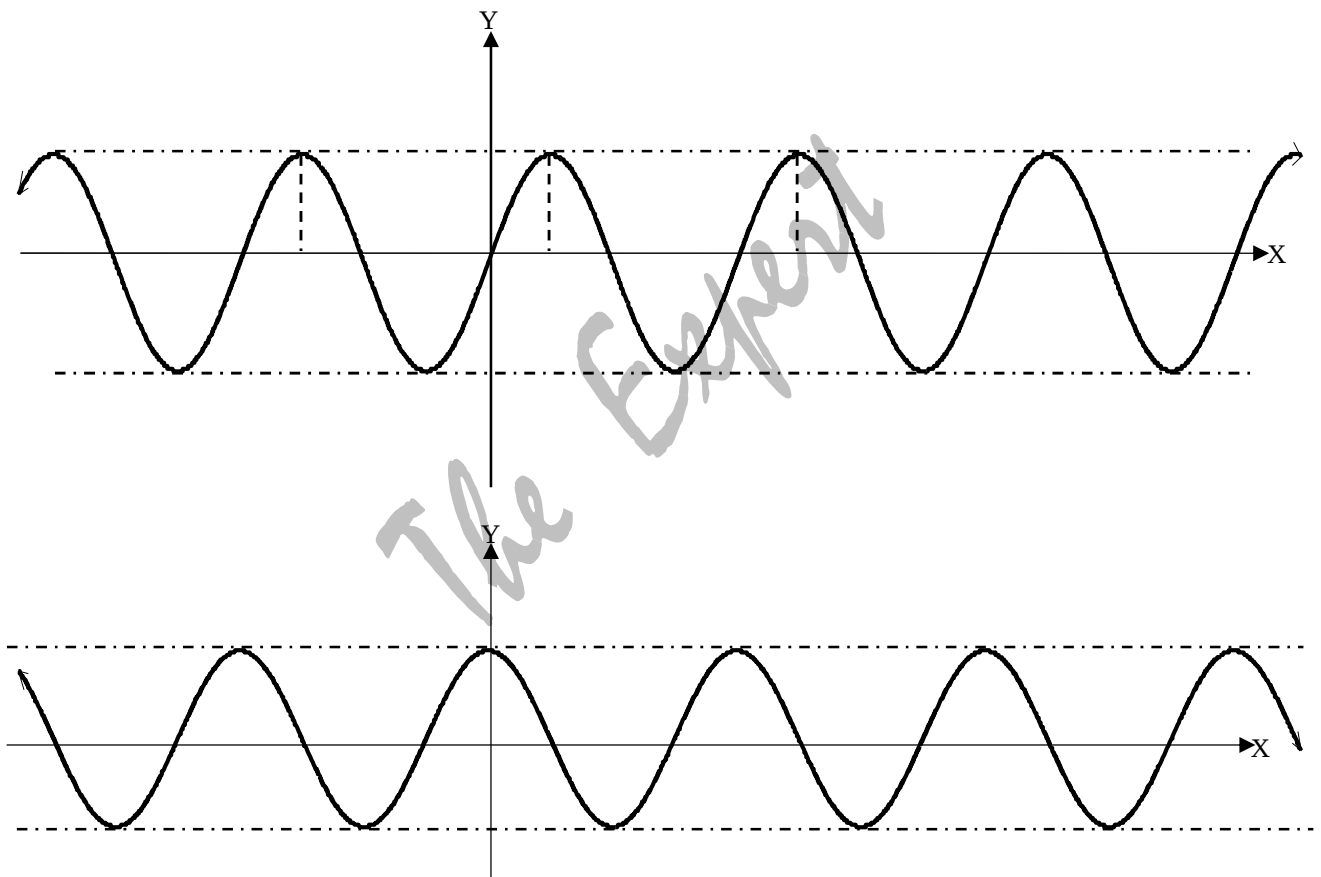
ดังนั้น ถ้าเรามีกราฟของฟังก์ชันในช่วง $[0, 2\pi]$ ช่วงอื่น ๆ ก็จะมีกราฟซ้ำกับกราฟในช่วง $[0, 2\pi]$

ซึ่งระยะ 1 **คาบ** คือ ช่วงสั้นที่สุดที่กราฟจะซ้ำรอยเดิม

และ **แอมพลิจูด** คือ ค่าครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

โดยที่ $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$; $x \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{I}$

รูปแสดงฟังก์ชัน Sine และ cosine



ลักษณะของกราฟที่เกิดขึ้น

1. โดเมนของฟังก์ชัน เท่ากับ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-1, 1]$
2. ฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน หนึ่งต่อหนึ่ง
3. กราฟ $y = \sin x$ ผ่านจุด $(0, 0)$ และกราฟ $y = \cos x$ ผ่านจุด $(0, 1)$ มีคาบ เท่ากับ 2π
4. ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน (Maximum) = 1 และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน (Minimum) = -1

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

5. แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{1}{2} [\text{Max} - \text{Min}]$

PB1 กำหนดให้ $y = -2\sin 3x$ ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ -2 และคาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{3}$
2. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ 2 และคาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{3}$
3. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ 2 และคาบ เท่ากับ 3π
4. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ -2 และคาบ เท่ากับ 2π

PB2 กำหนดฟังก์ชัน $y = -0.125 \cos (480\pi x)$ ข้อใดถูกต้อง

1. $-0.251 < y < 0.251$ และคาบ เท่ากับ $\frac{1}{240}$
2. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ -0.251 และคาบ เท่ากับ 480π
3. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ 0.251 และคาบ เท่ากับ 480
4. กราฟมีค่าแอมพลิจูด เท่ากับ 0.251 และคาบ เท่ากับ $\frac{1}{240}$

PB3 จากสมการ $y = -\sin \left(-2x - \frac{3\pi}{2} \right) + 5$ จงพิจารณา

- ก. มีแอมพลิจูดเท่ากับ 1 ความยาวคาบ เท่ากับ 2
- ข. เป็นกราฟเดียวกับ $y = \cos 2x + 5$
- ค. กราฟตัดแกน X ในช่วง $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ ข ถูกเพียงข้อเดียว
3. มีข้อที่ถูกต้อง 2 ข้อ
4. ไม่มีข้อใดถูกเลย

PB4 ให้ $\cos \theta = x + 5$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใด

1. $[-5, -4]$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. $[-1, 1]$
3. $[-6, -4]$
4. $[-4, 6]$

PB5 ถ้า $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $2 + \cos 3x$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ x มีค่าเท่าไร

1. $-\frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{\pi}{2}$
2. $-\frac{\pi}{6}$ หรือ $\frac{\pi}{6}$
3. $-\frac{\pi}{3}$ หรือ $\frac{\pi}{3}$
4. $-\frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{\pi}{4}$

PB6 ถ้า $0 \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $\sin \frac{x}{2}$ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ x มีค่าเท่าไร

1. 0
2. $\frac{\pi}{2}$
3. π
4. 2π

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

9. ฟังก์ชันตรีโกณมิติประยุกต์

สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิตินี้มีประโยชน์อย่างมากในการนำไปแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันไม่ว่าจะเป็น การก่อสร้าง สิ่งปลูกสร้างต่าง ๆ เป็นต้น ซึ่งพื้นฐานที่สำคัญของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีดังนี้

9.1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปมุมประกอบของผลบวกและผลต่าง

การแก้ปัญหาโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปของผลบวกและผลต่างนั้นจะนำไปใช้กับการแก้ปัญหาที่มีมุมตั้งแต่ 2 มุม บวกลบกันอยู่ที่นิยมกันมากก็คือ นำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เป็นมุมที่น้องไม่เคยรู้จักมาก่อน

เช่น $\sin 75^\circ$ น้องไม่ทราบค่าของมันเป็นเท่าไร แต่ถ้าแยกมุม 75° ให้อยู่ในรูปมุมสองมุมบวกกัน

ซึ่งจะได้ $75^\circ = (30^\circ + 45^\circ)$ แล้วกระจายสูตรข้างล่างเข้าไป น้องก็จะได้ค่า $\sin 75^\circ$

กำหนดให้ A, B เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

$$1. \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$2. \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$3. \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

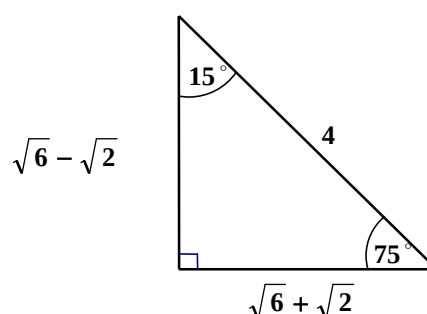
$$4. \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$5. \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$6. \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$7. \cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$8. \cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$



Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB1 จงหาค่าของ

ก. $\cos 40^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ \sin 10^\circ$

ข. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$

ค. $\sin 112^\circ \cos 68^\circ + \sin 68^\circ \cos 112^\circ$

ง. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

จ. $\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

ฉ. $\frac{\tan 220^\circ + \tan 40^\circ}{1 - \tan 220^\circ \tan 40^\circ}$

PB2 กำหนดให้ $\sin A = \frac{5}{13}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \leq A \leq \pi$ และ $\tan B = \frac{3}{4}$ เมื่อ $\pi \leq B \leq \frac{3\pi}{2}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

จงหาค่าของ

ก. $\sin (A + B)$

ข. $\cos (A - B)$

ค. $\tan (A + B)$

ง. $\cot (A - B)$

*The Expert***PB3** กำหนดให้ $\sin A = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \leq A \leq \pi$ และ $\cos B = \frac{1}{3}$ เมื่อ $0 \leq B \leq \frac{\pi}{2}$

จงหาค่าของ

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

- ก. $\sin (A + B)$
ข. $\cos (A - B)$
ค. $\tan (A + B)$
ง. $\cot (A - B)$

The Expert

PB4 ถ้า $\cot A = \frac{1}{4}$ และ $\cot (A - B) = 8$ แล้วค่าของ $\tan (A + B)$ เท่ากับข้อใด

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

1. $-\frac{79}{112}$
2. $\frac{79}{112}$
3. $-\frac{79}{124}$
4. $\frac{79}{124}$

PB5 ถ้า $\tan A = 2$ และ $(A + B) = 135^\circ$ เมื่อ B เป็นมุมแหลม จงหาค่า $\cos B$

Solⁿ :

PB6 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณที่กำหนดให้

ก. ถ้า $(A + B) = 45^\circ$ แล้ว $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ มีค่าเท่าใด

ข. ถ้า $(A + B) = 135^\circ$ แล้ว $\left[\frac{\tan A}{1 + \tan A} \right] \left[\frac{\tan B}{1 + \tan B} \right]$ มีค่าเท่าใด

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

Solⁿ :

The Expert

PB7 กำหนดให้ $\sin A = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} \leq A \leq 2\pi$

และ $\sin B = \frac{1}{\sqrt{26}}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \leq B \leq \pi$ ค่าของ $\tan(A - B)$ ตรงกับข้อใด

1. $\frac{12}{5}$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. $-\frac{12}{5}$

3. $\frac{5}{12}$

4. $-\frac{5}{12}$

PB8 กำหนดให้ $\sin(A + B) = \frac{56}{65}$, $\cos(A - B) = \frac{63}{65}$ และ $\sin B = \frac{5}{13}$

จงหาค่า $\cos A$ เมื่อ A, B เป็นมุมแหลม

1. $\frac{3\sqrt{6}}{63}$

2. $\frac{4}{5}$

3. $\frac{1036}{169}$

4. $\frac{3}{5}$

PB9 กำหนดให้ $\sin A + \cos B = p$ และ $\cos A + \sin B = q$

จงหาค่า $\sin(A + B)$ ในรูปพจน์ของ p และ q

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

9.2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมประกอบสองเท่า

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมสองเท่ามันจริง ๆ แล้วเราสามารถสร้างจากสูตรของมุมประกอบในรูปของผลบวกของมุม ซึ่งถ้าน้องรู้จักหลักการตรงนี้แล้วก็สามารถที่จะหามุม 4 เท่าหรือมุมครึ่งเท่าได้ ซึ่งการหามุม 2 เท่าสามารถทำได้ดังนี้

จาก $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 ดังนั้น $\sin 2A = \sin(A + A)$

$$= \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos A$$

ดังนั้น **$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$**

ส่วนการหา $\cos 2A$ ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกับ $\sin 2A$

จาก $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 ดังนั้น $\cos(A + A) = \cos 2A$

$$\cos 2A = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A$$

ดังนั้น **$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$**

จากสูตรของ $\cos 2A$ เราสามารถที่จะแปลงสูตรให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณ $\sin A$ หรือ $\cos A$ อย่างเดียวได้ โดยอาศัยเอกลักษณ์ของตรีโกณ

จาก $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ แล้วจะได้ว่า $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$
 แทน $\sin^2 A$ ในสูตร $\cos 2A$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

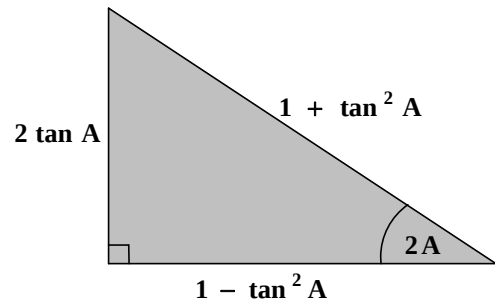
เช่นกัน จากเอกลักษณ์ ถ้า $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ จะได้

$$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

นอกจากนี้เรายังสามารถที่จะเขียน $\sin 2A$ และ $\cos 2A$ ให้อยู่ในรูปของ $\tan A$ ได้อีกด้วย
ซึ่งอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin 2A &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ 2. \quad \cos 2A &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ 3. \quad \tan 2A &= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} \end{aligned}$$



PB1 จงหาค่าต่อไปนี้

ก. $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$

ข. $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$

ค. $\frac{2 \tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$

ง. $\frac{1 - \tan^2 22.5^\circ}{1 + \tan^2 22.5^\circ}$

จ. $2 \cos^2 \theta - 1$

ฉ. $\frac{1 - \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)}$ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{8}$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB2 ถ้า $\tan A = -\frac{3}{4}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < A < 0$

จงหาค่าของ $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$

Solⁿ :

PB3 ให้ $\sin A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $90^\circ < A < 180^\circ$

จงหาค่าของ $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$

Solⁿ :

PB4 จงเขียน $\frac{\cos 2A}{1 + \sin 2A}$ ให้อยู่ในรูปของ $\tan A$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

1. $\frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$
2. $\frac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$
3. $\frac{\tan A}{1 + \tan A}$
4. $\frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

PB5 กำหนดให้ $\cot A = \frac{3}{7}$ แล้ว $3\cos 2A + 7\sin 2A$ มีค่าเท่าใด

1. 3
2. 7
3. 4
4. 10

PB6 ถ้า $\cot 2A = -\frac{4}{3}$ จงหาค่าของ $\tan A$

Solⁿ :

PB7 กำหนดให้ $\sin 2A = k$ จงเขียน $\sin^4 A + \cos^4 A$ ในรูป k

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB8 ถ้า $\sin 2A = \frac{24}{25}$ แล้ว $\sin^4 A + \cos^4 A$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{337}{625}$
2. $\frac{576}{625}$
3. $\frac{624}{625}$
4. $\frac{674}{625}$

PB9 กำหนดให้ $\tan A = a$ จงหาค่าของ $\frac{\sin 4A - 2 \sin 2A}{\sin 4A + 2 \sin 2A}$

Solⁿ :

PB10 กำหนดให้ $\cos(A + B) = 0.6$, $\cos(A - B) = 0.8$

จะได้ค่าของ $\sin 2A \sin 2B$ เท่ากับข้อใด

1. 0.07

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. 0.28
3. 0.14
4. 0.56

PB11 กำหนด $\cos(X + Y) = \frac{4 - 5\sqrt{3}}{20}$ และ $\cos(X - Y) = \frac{4 + 5\sqrt{3}}{20}$

ค่าของ $(\sin 2x + \sin 2Y)^2 - (\sin 2Y - \sin 2x)^2$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
2. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
3. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
4. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

PB12 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\sin^2 2A = \frac{1 - \cos 4A}{2}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ข. $1 - \cot^2 A = \frac{-\cos 2A}{\sin^2 A}$ เมื่อ $\sin A \neq 0$

ข้อใดที่เป็นเอกลักษณ์

1. ข้อ ก. ข้อเดียว
2. ข้อ ข. ข้อเดียว
3. ข้อ ก. และข้อ ข.
4. ไม่เป็นเอกลักษณ์ทั้งข้อ ก. และข้อ ข.

PB13 ให้ $\sin 2\theta = k$ จงหาค่าของ $\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$

Solⁿ :

PB14 กำหนด $\cos^8 A - \sin^8 A = \frac{5}{27}$ ค่าของ $\cos 2A$ คือข้อใด

1. $\frac{1}{3}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

- 2. $\frac{2}{3}$
- 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

*The Expert***9.3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมประกอบครึ่งเท่า**

สำหรับการสร้างสูตรของมุมครึ่งเท่านั้นเราสร้างได้จากสูตรของมุม 2 เท่า ซึ่งสร้างได้ดังนี้

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

จาก $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ถ้ากำหนดให้ $A = \frac{B}{2}$

แล้วจะได้ว่า $\cos 2\left(\frac{B}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)$

$$\therefore \sin\left(\frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}$$

และเช่นกัน จาก $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

แล้วจะได้ว่า $\cos 2\left(\frac{B}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{B}{2}\right) - 1$

$$\therefore \cos\left(\frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos B}{2}}$$

และจะได้ว่า $\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B}{2}\right)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}$

ดังนั้นสูตรมุมครึ่งเท่า มีดังนี้

$$1. \quad \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$2. \quad \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$3. \quad \tan\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

PB1 จงหาค่าของ

ก. $\sin 22.5^\circ$

ข. $\tan \frac{\pi}{8}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ค. $\cos 67^{\circ} 30'$

ง. $\cot 57^{\circ} 30'$

PB2 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

ก. $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

ข. $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

PB3 กำหนดให้ $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $90^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$

จงหาค่าของ $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ และ $\tan \frac{\theta}{2}$

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB4 จงหาค่าของ $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$, $\tan \frac{\theta}{2}$ ถ้า $\cot \theta = -\frac{4}{3}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Solⁿ :

PB5 ถ้ากำหนดให้ $270^\circ < A < 360^\circ$ และ $\cos A = \frac{24}{25}$

จงหาค่าของ $\tan \frac{A}{2}$

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB6 กำหนดให้ $\sin A = \frac{1}{3}$ และ $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ โดยที่ A, B เป็นมุมแหลม

จงหาว่า $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{2 - \sqrt{10}}{6}$
2. $\sqrt{\frac{7 - \sqrt{40}}{18}}$
3. $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$
4. $\frac{2 - \sqrt{5}}{2}$

PB8 ถ้า $\cos A = -\frac{1}{2}$ แล้วค่าของ $\cos \frac{A}{2}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

The Expert

9.4. ทรีโกณมิติของมุมสามเท่า

การแก้ปัญหามุมสามเท่าเช่นกันครับเราสามารถที่จะสร้างสูตรโดยอาศัยสูตรของมุมประกอบของผลบวกและ มุมสองเท่า ซึ่งสามารถสร้างสูตรได้ดังนี้

จาก $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cos(A + 2A) &= \cos 3A \\ \cos 3A &= \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A \\ &= \cos A[2\cos^2 A - 1] - \sin A[2\sin A \cos A] \\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2\sin^2 A \cos A \\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2[1 - \cos^2 A]\cos A \\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

และจาก

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin(A + 2A) &= \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A \\ \sin 3A &= \sin A[1 - 2\sin^2 A] + \cos A[2\sin A \cos A] \\ &= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A \cos^2 A \\ &= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A[1 - \sin^2 A] \\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

จากสูตรมุมสามเท่าของ $\sin 3A$ และ $\cos 3A$ เราสามารถสร้างสูตร $\tan 3A$ ได้ดังนี้ คือ

$$\begin{aligned}1. \quad \cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\ 2. \quad \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\ 3. \quad \tan 3A &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}\end{aligned}$$

PB1 จงหาค่าของ

- ก. $\sin 18^\circ$
- ข. $\cos 18^\circ$
- ค. $\cos 36^\circ$
- ง. $\sin 36^\circ$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

PB2 กำหนด $\cos A = \frac{3}{5}$ และ $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$

จงหาค่าของ $\sin 3A$, $\cos 3A$, $\tan 3A$

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB3 ถ้า $\tan A = \frac{4}{3}$ และ $\sec A > 0$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} 3A$

Solⁿ :

The Expert

PB4 จงหาค่าของ $3(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) - 4(\sin^3 20^\circ + \sin^3 40^\circ)$

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB5 จงหาค่าของ $\frac{\cos^3 A - \cos 3A}{\cos A} + \frac{\sin^3 A + \sin 3A}{\sin A}$

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

PB6 ค่าของ $\frac{\sin^3 15^\circ \cos 45^\circ + \cos^3 15^\circ \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$ ตรงกับข้อใด

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 1
4. 3

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB7 ค่าของ $\frac{4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ)}{\cos 20^\circ + \cos 40^\circ}$ คือข้อใด

1. 4
2. 3
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{3}{4}$

The Expert

PB8 ข้อใดคือค่าของ $\frac{4 \cos^3 20^\circ + 8 \cos^3 40^\circ - 4 \cos^3 80^\circ}{\cos 20^\circ + 2 \cos 40^\circ - \cos 80^\circ}$

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB9 ถ้า $\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 3A + \sin A}{\cos A - \cos 3A}$ แล้ว $\tan 2A$ คือข้อใด

1. 2
2. 3
3. $\sqrt{2}$
4. $\sqrt{3}$

PB10 ถ้า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และ $\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \sin 4\theta + \sin 2\theta$

จงหาค่าของ $\sin^2 \theta$

1. 1
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{3}{4}$

PB11 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A + B + C = 180^\circ$; $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

ข. $\sin A + 2 \sin 3A + \sin 5A = 4 \sin 3A \cos^2 A$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก. ถูกข้อเดียว
2. ข้อ ข. ถูกข้อเดียว
3. ถูกทั้งสองข้อ
4. ผิดทั้งสองข้อ

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

PB12 จงพิจารณาการเป็นเอกลักษณ์

ก. $4 \sin A \sin(60^\circ + A) \sin(60^\circ - A) = \sin 3A$

ข. $\frac{3 - 4 \cos 2A + \cos 4A}{3 + 4 \cos 2A + \cos 4A} = \tan^4 A$

ต่อไปนี้เป็นข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ ก. เท่านั้นที่เป็นจริง
2. ข้อ ข. เท่านั้นที่เป็นจริง
3. ทั้งข้อ ก. และ ข. เป็นจริง
4. ข้อ ก. และ ข. ไม่เป็นจริง

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

9.5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปของผลคูณ

การสร้างสูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปของผลคูณนั้นสามารถสร้างสูตรได้จากสูตรของมุมประกอบของผลบวกและผลต่าง ซึ่งทำได้ดังนี้

จาก $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \dots(1)$

และ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \dots(2)$

จับสมการ (1) + (2) จะได้ว่า

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin A \cos B$$

จับสมการ (1) - (2) จะได้ว่า

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2\cos A \sin B$$

จาก $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \dots(3)$

และ $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \dots(4)$

จับสมการ (3) + (4) จะได้ว่า

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$$

จับสมการ (4) - (3) จะได้ว่า

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A \sin B$$

9.6. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูปของผลบวก

$$1. \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right)$$

$$2. \sin A - \sin B = 2 \sin \left(\frac{A - B}{2} \right) \cos \left(\frac{A + B}{2} \right)$$

$$3. \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right)$$

$$4. \cos A - \cos B = 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{B - A}{2} \right)$$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB1 จงหาค่าของ

ก.
$$\frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}$$

ข.
$$\frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}$$

ค.
$$\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \sin 30^\circ$$

ง.
$$2\cos 50^\circ \cos 70^\circ - \cos 20^\circ$$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)**PB2** จงหาค่าของ

ก. $\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ$

ข. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

ค. $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

ง. $\sin 70^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \cos 10^\circ$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB3 จงหาค่าของ

ก. $\sin 40^\circ \sin 80^\circ \sin 160^\circ$

ข. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

ค. $4 \sin 15^\circ \sin 75^\circ \sin 105^\circ \sin 165^\circ$

ง. $2 \cos 50^\circ \cos 10^\circ - 2 \sin 40^\circ \sin 20^\circ + 2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ$

The Expert

PB4 จงเปลี่ยนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลคูณ

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ก. $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$

ข. $\cos 4\theta + \cos 6\theta$

ค. $\cos(60^\circ + A) - \cos(60^\circ - A)$

ง. $\sin 4x - \sin 2x$

จ. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right)$

ฉ. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ - \sin 80^\circ$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

จงหาค่าของ $\frac{\sin 2A + \sin 5A - \sin A}{\cos 2A + \cos 5A + \cos A}$

Solⁿ :

PB6 กำหนดให้ $0 < \theta < 90^\circ$ และ $\cos 2\theta = \frac{1}{8}$ จงหาค่าของ $\cos 3\theta + \cos 5\theta$

Solⁿ :

PB7 จงหาค่าของ $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

Solⁿ :

PB8 กำหนดให้ $\frac{\sin 4\theta - \sin 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \frac{3}{5}$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ จงหาค่า $\cos \theta + \sin \theta$

Solⁿ :

PB9 กำหนด $\frac{1 - \cos 40^\circ}{\cos 50^\circ} = a$ แล้วจงหาค่าของ $\sin 102^\circ \sin 22^\circ - \sin 158^\circ \sin 68^\circ$ เท่ากับเท่าไร

1. $5a^2 - 1$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. $\frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}$
3. $\frac{1-6a^2+a^4}{1+2a^2+a^4}$
4. $\sqrt{1+\frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}}$

PB10 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $\tan \frac{\theta}{2} = k$ แล้ว $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1+2k-k^2}{1+k^2}$

ข. $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ ก. และข้อ ข. ถูก
2. ข้อ ก. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ ข. ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ ก. และข้อ ข. ผิด

PB11 กำหนดให้ $\sin 35^\circ = a$ จงหาค่าของ $\frac{1 + \tan 135^\circ \tan 115^\circ}{\tan 135^\circ - \tan 115^\circ}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

1. $\frac{2a\sqrt{1-a^2}}{1-2a^2}$
2. $\frac{2a\sqrt{1-a^2}}{1+2a^2}$
3. $\frac{1-2a^2}{2a\sqrt{1-a^2}}$
4. $\frac{1+2a^2}{2a\sqrt{1-a^2}}$

*The Expert***10. อินเวอร์สการคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

เป็นที่รู้กันว่าตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันดังนั้นเราจึงเรียกมันว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติแต่มันไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นอินเวอร์สของมันจึงไม่เป็นฟังก์ชัน ซึ่งถ้าเราจะทำให้อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันเราจะต้องกำหนดช่วงของโดเมนที่เหมาะสมให้ อินเวอร์สการคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เรียกอีกแบบว่า “ ตัวผกผัน ”

บทนิยาม ถ้า $y = \arcsin x = \sin^{-1}x$ นิยามด้วย $x = \sin y$

สำหรับ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ และ $-1 \leq x \leq 1$

แล้วจะได้ว่า $\sin(\sin^{-1}x) = x$ และ $\sin^{-1}(\sin y) = y$

บทนิยาม ถ้า $y = \arctan x = \tan^{-1}x$ นิยามด้วย $x = \tan y$

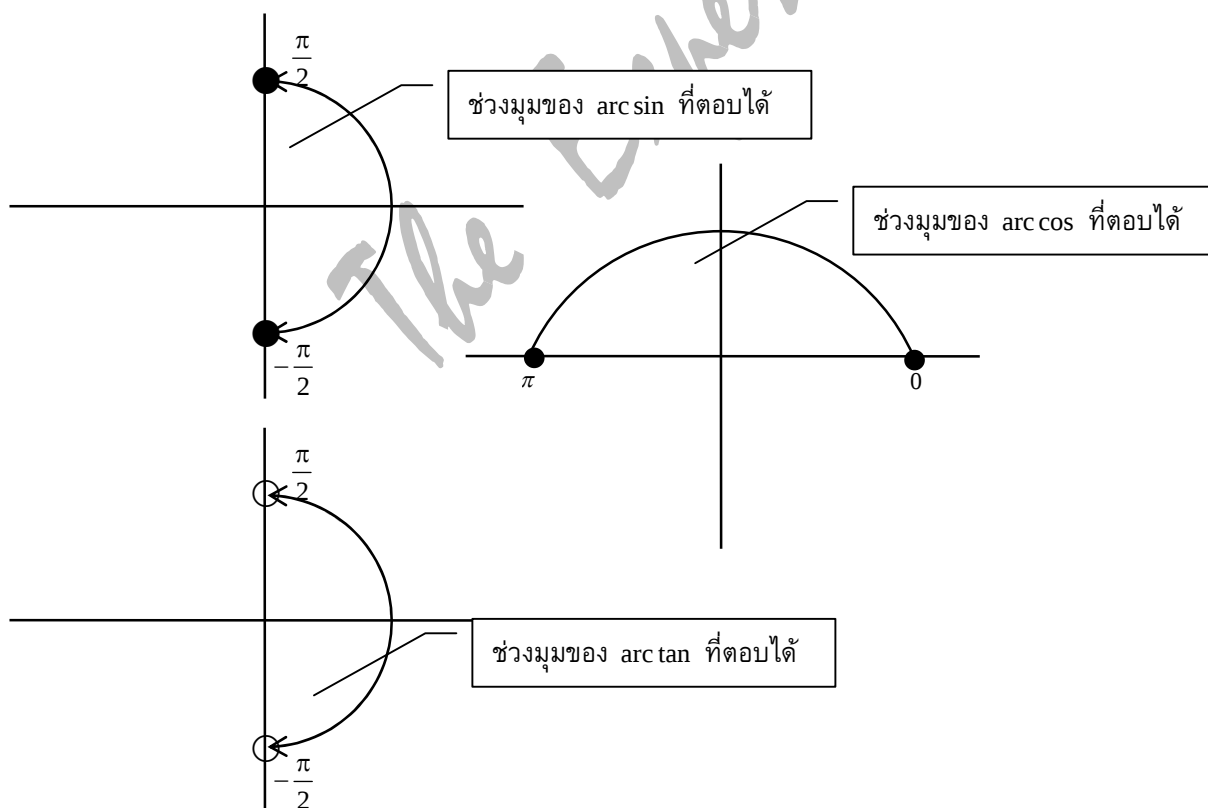
สำหรับ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ และ $-\infty < x < \infty$

แล้วจะได้ว่า $\tan(\tan^{-1}x) = x$ และ $\tan^{-1}(\tan y) = y$

บทนิยาม ถ้า $y = \arccos x = \cos^{-1}x$ นิยามด้วย $x = \cos y$

สำหรับ $0 \leq y \leq \pi$ และ $-1 \leq x \leq 1$

แล้วจะได้ว่า $\cos(\cos^{-1}x) = x$ และ $\cos^{-1}(\cos y) = y$



ก. $y = \arcsin x$ หมายความว่า มุม y เป็นที่เรเดียนที่จะทำให้ค่าไซน์ของมุม y มีค่าเท่ากับ x

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

เช่น $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ แล้วจะได้ว่า $y = \frac{\pi}{6}$ เป็นต้น

ข. $y = \arccos x$ หมายความว่า มุม y เป็นที่เรเดียนที่ทำให้ค่าโคไซน์ของมุม y มีค่าเท่ากับ x

เช่น $y = \arccos(-1)$ แล้วจะได้ว่า $y = \pi$

ค. $y = \arctan x$ หมายความว่า มุม y เป็นที่เรเดียนที่ทำให้ค่า $\tan$ ของมุม y

เช่น $y = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ แล้วจะได้ว่า $y = \frac{\pi}{6}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

ก. $\arccos(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ข. $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

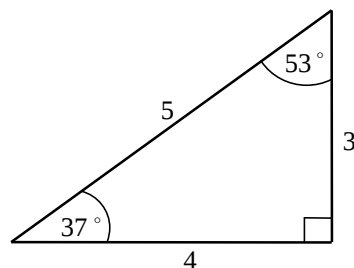
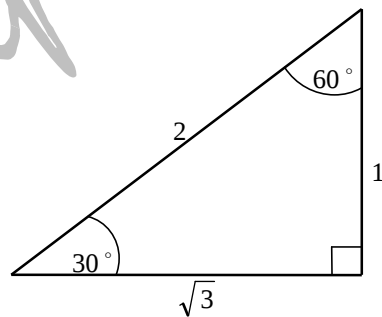
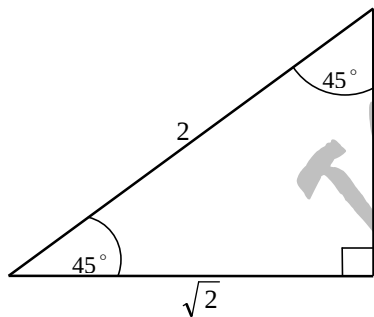
ค. $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arcsin(-1)$

คุณสมบัติอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

1. $\sin(\arcsin x) = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$
2. $\cos(\arccos x) = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$
3. $\tan(\arctan x) = x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$
4. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
5. $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$
6. $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot}\left(\frac{xy-1}{y+x}\right)$
7. $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$
8. $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
9. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$



Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB1 จงหาค่าของ

ก. $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{4}{5}$

ข. $\arctan 1 + \operatorname{arccot} \sqrt{3}$

ค. $\operatorname{arcsec} 2 - \operatorname{arccosec} 2$

ง. $\operatorname{arccosec} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \arctan(-1)$

PB2 จงหาค่าของ

ก. $\sin \left(\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$

ข. $\cos \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)$

ค. $\cot \left(\operatorname{arcsec} \left(\operatorname{cosec} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) \right) \right)$

ง. $\sin \left(2 \arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arctan \sqrt{3} \right)$

จ. $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) + \arccos \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) - \arctan \left(\cot \frac{\pi}{3} \right)$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)**PB3** จงหาค่าของ

ก. $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5}\right)$

ข. $\sin\left(2\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{5}{12}\right)$

ค. $\cos\left(2\arctan(1 - \sqrt{2})\right)$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB4 จงหาค่าของ

ก. $4 \tan \left(2 \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$

ข. $\left(\sin \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{3}{5} \right) \right) \times \left(\cos \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{4}{5} \right) \right)$

ค. $\cos \left[\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] + \cos \left[\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB5 จงหาค่าของ

ก. $\sec^2(\arctan 2) + \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} 3)$

ข. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

ค. $\cot^2 \frac{13\pi}{4} - \sin \left[\frac{7\pi}{2} - 2\arctan(1 - \sqrt{2}) \right]$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB6 ค่าของ $\cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$ คือข้อใด

1. $\frac{12}{13}$
2. $\frac{5}{13}$
3. $\frac{5}{12}$
4. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

PB7 ค่าของ $\arcsin\left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{5\pi}{12}\right)$ เท่ากับข้อใด

1. 0
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{\pi}{3}$
4. $\frac{\pi}{4}$

PB8 ค่าของ $\sin\left[\frac{\arctan \frac{3}{4}}{2}\right] + \cos\left(2\arcsin \frac{3}{5}\right)$ ตรงกับข้อใด

1. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{6}{25}$
2. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{6}{25}$
3. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{7}{25}$
4. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{7}{25}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB9 จงหาผลลัพธ์ทั้งหมดของคำตอบจากสมการ $\arccos\left[\sin\left(\pi + \arccos\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = \pi$

Solⁿ :

PB10 กำหนดให้ $\arcsin\left[\cos\left(\pi + \arcsin\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = -\frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ x

Solⁿ :

PB11 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\cos[2\arccos(1 - x)] = x^2$

Solⁿ :

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB12 จงหาค่าของ x จากสมการ $\arcsin \frac{5}{x} + \arcsin \frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$

Solⁿ :

PB14 สมการ $2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ จะมีคำตอบเป็นสมาชิกของเซตใด

1. $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
2. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$
3. $[1, 2)$
4. $(3, 5]$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

11. สมการของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สมการตรีโกณมิติ คือ สมการที่ประกอบด้วยพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของตัวแปรค่าตอบของสมการตรีโกณมิติมี 2 ลักษณะ คือ

1. คำตอบเฉพาะของสมการตรีโกณมิติ หมายถึง คำตอบของสมการที่มีการจำกัดขอบเขตของคำตอบ

2. คำตอบทั่วไปของสมการตรีโกณมิติ หมายถึง คำตอบของสมการที่อยู่ในรูปทั่วไปภายใต้เอกภพสัมพัทธ์ R

2.1. คำตอบทั่วไปของ $\sin x$ คือ $n\pi + (-1)^n c$

2.2. คำตอบทั่วไปของ $\cos x$ คือ $2n\pi \pm c$

2.3. คำตอบทั่วไปของ $\tan x$ คือ $n\pi + c$ เมื่อ $n \in I$ และ c เป็นจำนวนบวกที่เล็กที่สุด

เทคนิคการแก้ปัญหสมการและอสมการตรีโกณมิติ

การแก้ปัญหของสมการและอสมการของฟังก์ชันตรีโกณมิติเราจะต้องเปลี่ยนรูปสมการหรืออสมการที่ให้อำให้อยู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติเพียงหนึ่งตัว $\sin$ หรือ $\cos$ หรือ $\tan$

หรืออย่างมากที่สุดเพียงสองตัว $\sin$ และ $\cos$ หรือ $\sin$ และ $\tan$ หรือ $\cos$ และ $\tan$ ให้ได้

โดยใช้เอกลักษณ์มาช่วยในการเปลี่ยนรูปซึ่ง ได้แก่ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

และ $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

หลักการสำคัญที่สุดในการแก้สมการฟังก์ชันตรีโกณก็คือ น้องจะต้องดูช่วงมุมที่โจทย์ให้มาก่อน

แล้วทำช่วงมุมที่ให้อำให้เหมือนกับที่คำถามต้องการ

เช่น กำหนดให้ $\sin 2x = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่า x

ทำช่วงมุม $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ให้อยู่ในรูป $2x$ จะได้ $2\pi \leq 2x \leq 3\pi$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB1 กำหนดให้ $0 \leq x \leq 2\pi$ จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

ก. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$

ข. $\tan x \sin x + \tan x = 0$

ค. $\sin 2x = \cos x$

ง. $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB2 กำหนดให้ $0 \leq x \leq 2\pi$ จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

ก. $2\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

ข. $\sin 3x + \sin x = 0$

ค. $2\sin x \tan x - 2\sin x - \tan x + 1 = 0$

ง. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB3 กำหนดให้ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ จงหาเซตคำตอบของสมการ

ก. $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = \cos x$

ข. $\cot x + 2 \sin x = \operatorname{cosec} x$

ค. $\cos x + 4 \sin x - \sin 2x = 2$

The Expert

PB4 กำหนดให้ $0^\circ \leq \theta \leq 2\pi$ จงหาเซตคำตอบของสมการ

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ก. $\sin \theta + \cos \theta = 1 + \sin \theta \cos \theta$

ข. $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 1$

ค. $\tan^2 2\theta - 4 \sec 2\theta + 5 = 0$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

PB5 กำหนดให้ $0^\circ < \theta \leq 270^\circ$ และ $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta$

จงหาผลบวกของสมาชิกในเซตคำตอบของสมการ

1. 360°
2. 337.5°
3. 697.5°
4. 720°

PB6 กำหนดให้ $A = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin 2x + \sec^2 x = \sin x + 2\cos x + \tan^2 x\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. π
2. $\frac{3\pi}{2}$
3. 2π
4. $\frac{5\pi}{2}$

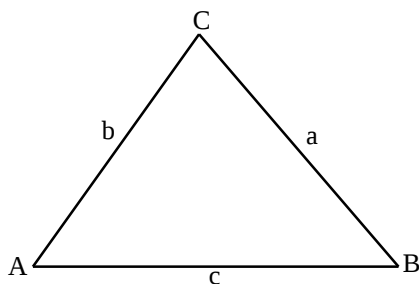
Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

12. การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติจะมีการนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันค่อนข้างมาก ไม่ว่าจะเป็นการหาความสูงของสิ่งปลูกสร้าง การหาพื้นที่ของรูปทรงเรขาคณิต เป็นต้น

1. กฎของไซน์(Sine Law)

สามเหลี่ยมใดๆที่มีด้านตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย มีด้านตรงข้ามมุม B ยาว b หน่วย และมีด้านตรงข้ามมุม C ยาว c หน่วย ดังรูป



จากรูป สามเหลี่ยม ABC เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปกฎของไซน์ได้ดังนี้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. กฎของโคไซน์(Cosine Law)

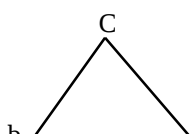
อาศัยรูปสามเหลี่ยม ABC ตามรูปข้างบนเพื่อสร้างกฎของโคไซน์ ซึ่งกฎของโคไซน์มีดังนี้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{หรือ} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{หรือ} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \text{หรือ} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3. การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ



Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

จากรูป พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC หาได้จากสูตร

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC \text{ เท่ากับ } \frac{1}{2}ab \sin C$$

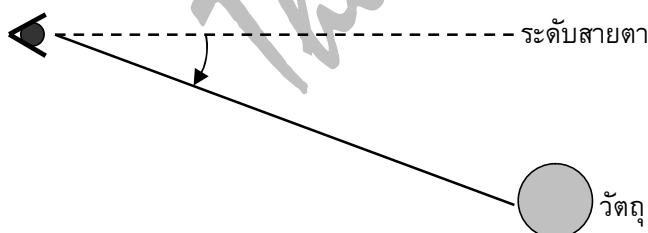
$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC \text{ เท่ากับ } \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC \text{ เท่ากับ } \frac{1}{2}bc \sin A$$

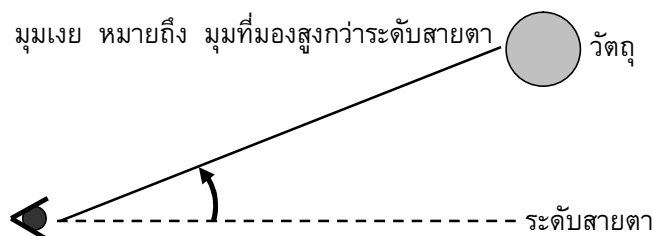
13. มุมในการมอง

การประยุกต์ใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติที่มักจะพบบ่อย ได้แก่ การหาความสูงของตึก การหาความสูงของเสาธง เป็นต้น การแก้ปัญหาในรูปแบบนี้จะต้องวาดรูปประกอบ (ถ้าโจทย์ไม่ได้ให้รูปมา) และนำค่าอัตราส่วนของมุม 30° , 45° และ 60° มาใช้ประกอบในการแก้ปัญหาด้วย

ก. มุมก้ม มุมก้ม หมายถึง มุมที่มองต่ำกว่าระดับสายตา



ข. มุมเงย มุมเงย หมายถึง มุมที่มองสูงกว่าระดับสายตา



PB1 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก. กำหนดให้ $a = 4$ หน่วย, $c = 6$ หน่วย และ $B = 60^\circ$ จงหา b

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ข. กำหนดให้ $a = \sqrt{3} + 1$ หน่วย , $b = 2$ หน่วย และ $c = \sqrt{6}$ หน่วย จงหา B

ค. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{3}$ แล้ว A มีค่าเท่าใด

Solⁿ :

The Expert

PB2 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ยาว a , b และ c หน่วย ตามลำดับ จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก. ในสามเหลี่ยม ABC มีด้าน $a = 6$, $b = 10$ มุม $C = 120^\circ$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ข. สามเหลี่ยม ABC มีด้าน $AC = 12$, $AB = 21$, $A = 30^\circ$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

ค. ถ้าด้านของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น x , y , $\sqrt{x^2 + xy + y^2}$ ตามลำดับ

จงหาว่าสามเหลี่ยมรูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมอะไร

Solⁿ :

The Expert

PB3 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ยาว a , b และ c หน่วย ตามลำดับ
จงตอบคำถามต่อไปนี้

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ก. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ จงหามุม C

ข. ในสามเหลี่ยม ABC จงหามุม C เมื่อกำหนด $(a+b+c)(a+b-c) = ab$

Solⁿ :

The Expert

PB4 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ยาว a , b และ c หน่วย ตามลำดับ
จงตอบคำถามต่อไปนี้

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ก. จากรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $BAC = 30^\circ$ มีด้าน AB ยาว 6 หน่วย และพื้นที่ของสามเหลี่ยม $ABC = 12$ จงหาค่า $a \sin B$

ข. ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน ถ้า $\cos A = -\frac{1}{2}$ และ $\sin B = \frac{1}{2}$

จงหาอัตราส่วนของด้าน $a : b : c$

Solⁿ :

The Expert

PB5 ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$

จงหาว่า $\cos A : \cos B : \cos C$ คือข้อใด

1. $4 : 5 : 6$

2. $2 : 3 : 4$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

3. $1 : 9 : 12$

4. $2 : 9 : 12$

PB6 กำหนดสามเหลี่ยม ABC ถ้า $2 \sin B = 1$ และ $\frac{c}{a+b} = \frac{a-b}{b+c}$

แล้วจงพิจารณาว่าเป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

1. สามเหลี่ยมด้านเท่า
2. สามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า
4. สามเหลี่ยมมุมฉาก

PB7 กำหนด $\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$ เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ

จงหาว่า $\sin A$ มีค่าตรงกับตรงใด

1. $\frac{2\sqrt{70}}{25}$
2. $\frac{4\sqrt{30}}{25}$
3. $\frac{2\sqrt{14}}{15}$
4. $\frac{5\sqrt{21}}{16}$

PB8 สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $450\sqrt{3}$ ตารางนิ้ว มีมุมหนึ่งเท่ากับ 60°

และด้านตรงข้ามกับมุมนี้ยาว $30\sqrt{3}$ นิ้ว จงหาว่าด้านอีกสองด้านที่เหลือมีความยาวต่างกันกี่นิ้ว

1. 20
2. 30

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

3. 40
4. 50

PB9 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ที่มีสมบัติว่า $6 \sin A = 4 \sin B = 3 \sin C$

จงหาว่า $\sin \frac{C}{2}$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{\sqrt{5}}{4}$
4. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

PB10 ในรูปสามเหลี่ยม ABC กำหนด $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$ และด้าน $c = \sqrt{3}a$

จงหาค่าของ $\tan^2 A + \tan^2 C - \tan A \tan C$

1. 0
2. $\frac{2}{3}$
3. $2\frac{1}{3}$
4. $4\frac{1}{3}$

PB11 ชายคนหนึ่งมองขึ้นไปยังยอดหอคอยแห่งหนึ่งเป็นมุมยกขึ้น A° เมื่อเดินเข้าไปหาเป็นระยะทาง a ฟุต เห็นเป็นมุมยกขึ้น 45° และเดินเข้าไปอีก b ฟุต เห็นมุมยกขึ้นเป็น $90^\circ - A$ จงหาความสูงของหอคอย

1. $\frac{a - b}{ab}$ ฟุต

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

2. $\frac{ab}{a-b}$ ฟุต
3. ab ฟุต
4. $\frac{b}{a}$ ฟุต

PB12 จงตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

ก. ชายผู้หนึ่งอยู่บนเส้นถนนสายหนึ่งมองเห็นยอดเสาไฟฟ้าเป็นมุมเงย 30°

แต่เมื่อเขาเดินตรงเข้าไปหาเสาไฟฟ้าอีก 30 เมตร เขาเห็นยอดเสาไฟฟ้าเป็นมุมเงย 45°

จงหาความสูงของเสาไฟฟ้า

ข. จากหน้าผาซึ่งสูง 200 เมตร เหนือระดับน้ำทะเลผู้สังเกตการณ์คนหนึ่งมองเห็นเรือสองลำทอดสมอยู่ในทะเลเป็นมุมก้ม 30° และ 60° จากระดับเส้นสายตาเส้นเดียวกัน จงหาว่าเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

Solⁿ :

PB13 จงตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

ก. นายแดงยืนอยู่ทางทิศตะวันตกของตึกหลังหนึ่งมองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45°

จากจุดนี้เขาเดินไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 100 เมตร จะมองเห็นยอดตึก (ที่ตำแหน่งเดิม) เป็นมุมเงย 30°

จงหาความสูงของตึก

ข. นายเอกอยู่บนตึกาดาดฟ้า 15 ชั้น หลังหนึ่ง เขามองเห็นป้อมยามอยู่ทางทิศตะวันออกของตึกหลังหนึ่ง

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

เป็นมุมก้ม 60° และมองเห็นรถบรรทุกคันหนึ่ง จอดอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยามนั้นเป็นมุมก้ม 30°
อยากรหาว่ารถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยามเท่าใด ถ้าตึกนั้นสูงชันละ 4 เมตร

Solⁿ :

The Expert

Mathematical Problems
Trigonometry Function

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

1. ถ้า x เป็นจำนวนจริงในช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2 \sin 2x - \cot 2x - \operatorname{cosec} 2x = 0$

แล้ว $\sin^2 4x + \cos^2 x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | 2. $\frac{3}{4}$ |
| 3. $\frac{4}{3}$ | 4. $\frac{3}{2}$ |

2. ถ้า S เป็นเซตคำตอบของสมการ $\tan x + 2 \sin x = 0$ โดยที่ $0 \leq x \leq 2\pi$ แล้วผลบวกของสมาชิกในเซต S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-----------|-----------|
| 1. 3π | 2. 4π |
| 3. 5π | 4. 6π |

3. กำหนดให้ $\sin 3\theta + \sin \theta = 1 - 4 \sin^3 \theta$ แล้ว $\sec 2\theta + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. $\frac{7}{8}$ | 2. $\frac{9}{8}$ |
| 3. $\frac{25}{28}$ | 4. $\frac{39}{28}$ |

4. กำหนดให้ $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ ถ้า $\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin(x+y) \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$

แล้ว $\tan(2x + y)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------|----------------|
| 1. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2. $-\sqrt{3}$ |
| 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 4. $\sqrt{3}$ |

5. ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2 \arcsin x$ แล้ว ค่าของ $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right)$ คือข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\frac{4}{9}$ | 2. $\frac{2}{9}(1 + \sqrt{8})$ |
| 3. $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12}$ | 4. $\frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$ |

6. เซตคำตอบของสมการ $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. $(-4, 0)$ | 2. $(-3, 1)$ |
| 3. $(-2, 2)$ | 4. $(-1, 3)$ |

7. กำหนดให้ $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ค่าของ $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-12\sqrt{3}}{25}$

2. $\frac{-6\sqrt{3}}{25}$

3. $\frac{6\sqrt{3}}{25}$

4. $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

8. เซตคำตอบของสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$

2. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

3. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right]$

4. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

9. ถ้า $3\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$ และ $\sin \alpha - 2\sin \beta = 0$ โดยที่ $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

แล้ว $\sin(\alpha + \beta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

4. 1

10. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x - 2)$ โดเมนของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2, 3)$

2. $(2, 3]$

3. $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

4. $\left(2, \frac{\pi}{2}\right]$

11. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีด้าน BC , CA และ AB ยาว a , b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $(a + b + c)(a - b - c) = -3bc$ และ $4a^2 = 6b^2$ แล้ว $1 + 2\sin^2(3A - 2B)$ เท่ากับเท่าใด

12. ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{32}$

2. $\frac{11}{16}$

3. $\frac{9}{16}$

4. $\frac{9}{12}$

13. ค่าของ $\tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1

2. 1

3. $\frac{4}{5}$

4. $-\frac{4}{5}$

14. สามเหลี่ยม ABC มีด้าน a , b , c เป็นด้านตรงข้ามมุม A , B , C

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ซึ่งมีความยาวเป็น 3 , 2.5 , 1 หน่วย ตามลำดับ ค่าของ $b \cos C + c \cos B$ เท่ากับเท่าใด

15. นาย ก เดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ a หน่วย แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตก b หน่วย ต่อจากนั้น จึงเดินทางไปทางทิศเหนืออีก c หน่วย อยากทราบว่านาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$
2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ac)^{\frac{1}{2}}$
3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{\frac{1}{2}}$
4. $a + (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$

16. กำหนดให้ $5 \cos 3A \cos A + 5 \sin 3A \sin A = -3$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้ คือค่าของ $\tan A$

1. $\frac{1}{2}$
2. 1
3. $\frac{3}{2}$
4. 2

17. กำหนดให้ $x \in [0, 4\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right\}$
2. $\left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6} \right\}$
3. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2} \right\}$
4. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

18. จำนวนสมาชิกของเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x - x^2) = \arcsin x + \arcsin(x - 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

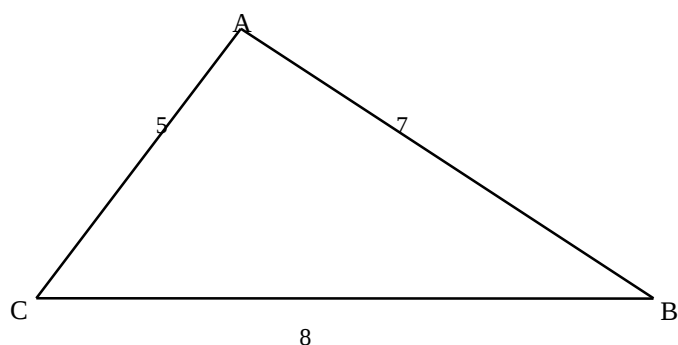
19. $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1}{1 + \sqrt{3}}$
2. $\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$
3. $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$
4. $\frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

20. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม ดังรูป

ค่าของ $\sin^2 \frac{B}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{28}$
2. $\frac{7}{28}$



Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

3. $\frac{12}{28}$

4. $\frac{21}{28}$

21. กำหนดให้ $A = \left\{ \sin \theta \mid \tan \theta(1 - \sin \theta) = \frac{2 \cos 2\theta}{\cos \theta} \right\}$ ผลบวกของสมาชิกในเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$

2. $\frac{5}{3}$

3. $-\frac{1}{3}$

4. $-\frac{5}{3}$

22. กำหนดให้ $\arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{12}{13} + x = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{16}{63}$

2. $\frac{6}{63}$

3. $-\frac{16}{63}$

4. $-\frac{6}{63}$

23. $\sec \left(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

24. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\cos(2 \arcsin x) + 2 = 4 \sin^2(\arccos x)$
ข้อใดต่อไปนี้คือผลคูณของสมาชิกในเซต A

1. $-\frac{1}{4}$

2. $-\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{1}{2}$

25. กำหนดให้ $f(x) = \pi \left(\frac{x+7}{24} \right)$ เมื่อ $-3 < x \leq 3$ และ $f(x+6) = f(x)$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ถ้า $g(x) = A + \arcsin x$ โดยที่ $A \in [0, \pi]$ และ $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ แล้ว ค่าของ $(g^{-1} \text{ of } 5)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

2. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

3. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

4. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

26. $\left\{ \cos A \mid 0 \leq A \leq \frac{4\pi}{3} \text{ และ } 5 - 3\sin 3A \text{ มีค่ามากที่สุด} \right\}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

2. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right\}$

3. $\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

4. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

27. ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีมุม $BAC = 45^\circ$ มุม $ACB = 60^\circ$ และด้าน AC ยาว 20 นิ้ว แล้ว พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$ ตารางหน่วย

2. $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ ตารางหน่วย

3. $\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$ ตารางหน่วย

4. $\frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ ตารางหน่วย

28. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin x \cos x \\ 2 \sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix}$

และ $S = \{x \in [0, \pi] \mid 2\det(A^2) - 3\sqrt{3}\det(A) + \det(\sqrt{3}I) = 9 \text{ เมื่อ } I \text{ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ } 2 \times 2\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2\pi}{6}$

2. $\frac{3\pi}{6}$

3. $\frac{4\pi}{6}$

4. $\frac{5\pi}{6}$

29. ถ้า $\sin x = \frac{3}{5}$ และ $\tan x = -\frac{3}{4}$ แล้ว $\det \begin{bmatrix} \operatorname{cosec} x & \sec x \\ 1 & \cos x \end{bmatrix}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{6}$

2. $-\frac{1}{3}$

3. $-\frac{2}{3}$

4. -1

30. ถ้า $\arctan x = \arctan \frac{1}{4} - 2\arctan \frac{1}{2}$ แล้ว $\sin(\pi + \arctan x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{13}{5\sqrt{17}}$

2. $\frac{16}{5\sqrt{17}}$

3. $\frac{-13}{5\sqrt{17}}$

4. $\frac{-16}{5\sqrt{17}}$

31. รูปสามเหลี่ยม ABC มี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ถ้า $\cos B = \frac{1}{4}$ และ $(a + b + c)(a - b + c) = 30$ แล้ว ac มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12
2. 20
3. $\frac{20}{5}$
4. $\frac{40}{3}$

32. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือเซตของจำนวนจริง

ก. $\exists x (\cot 2x - \cot x = 0)$ ข. $\forall x \left(\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right)$

ค่าความจริงของข้อความ ก. และข้อความ ข. เป็นไปตามข้อใดต่อไปนี้

1. ก เป็นจริง และ ข เป็นจริง
2. ก เป็นจริง และ ข เป็นเท็จ
3. ก เป็นเท็จ และ ข เป็นจริง
4. ก เป็นเท็จ และ ข เป็นเท็จ

33. ถ้า $\sin 15^\circ + \sin 55^\circ = x$ และ $\cos 15^\circ + \cos 55^\circ = y$ แล้ว $(x + y)^2 - 2xy$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4 \cos^2 20^\circ$
2. $2 \cos^2 20^\circ$
3. $4 \cos^2 40^\circ$
4. $2 \cos^2 40^\circ$

34. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \left(\tan 30^\circ \right)^x & -1 \\ \left(\cot 60^\circ \right)^x & 2 \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = 9$ แล้ว A^{-1} คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{3}{1} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{9}{-1} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

35. $-\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ - \sin^2 3^\circ + \dots - \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

36. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เซตคำตอบของสมการ $\frac{\cos^2 \theta - \cos \theta}{\sin \theta - \frac{1}{2}} < 0$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\left(0, \frac{\pi}{3} \right)$
2. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right)$
3. $\left(0, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi \right)$
4. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right)$

37. ถ้า a และ b เป็นคำตอบของสมการ $\sin(2 \arcsin x) = x$ โดยที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $|\sin \arctan(ab)|$ เท่ากับเท่าใด

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

38. นายดำยืนบนสนามแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° แต่เมื่อเขาเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 20 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 75° ในขณะที่เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° นั้น เขายืนอยู่ห่างจากเสาธงเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $10\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ เมตร

2. $10\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ เมตร

3. $10(2 + 2\sqrt{3})$ เมตร

4. $10(2 + \sqrt{3})$ เมตร

39. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $A = 30^\circ$ ด้าน BC ยาว 2 เซนติเมตร และด้าน AC ยาว 3 เซนติเมตร แล้ว $4 \sin 3B$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

40. ถ้า $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$ แล้ว $\arccos x - \arctan 2x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{12}$

2. $\frac{5\pi}{12}$

3. $\frac{7\pi}{12}$

4. $\frac{11\pi}{12}$

41. $1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\arccos\frac{4}{5} - \arctan\frac{4}{3}\right)\right)$ เท่ากับเท่าใด

42. ถ้า $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\tan^2 B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4

2. $\frac{3}{2}$

3. 1

4. $\frac{2}{3}$

43. ค่า $\sin\left(2\arctan\frac{1}{2}\right) + \cot^2\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$ เท่ากับเท่าใด

44. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี $\hat{ACB} = 60^\circ$ ลากเส้นตรงจากจุด A ไปพบด้าน BC ที่จุด D โดยทำให้ $\hat{BAD} = 30^\circ$ ถ้าระยะ BD ยาว 3 หน่วย และระยะ AD ยาว 2 หน่วย แล้วระยะ CD ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

3. $\frac{7\sqrt{6}}{9}$

4. $\frac{8\sqrt{6}}{9}$

45. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน BC ยาว $\sqrt{3}$ หน่วย ด้าน AC ยาว 2 หน่วย

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

ถ้ามุม $B = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ แล้วค่าของ $\sin(A + B) + \sin(A - B)$ เท่ากับเท่าใด

46. กำหนดให้ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ถ้า $\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - 1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + 1} = \frac{3}{5}$ แล้ว $\cos^2 \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $\frac{3}{5}$ | 2. $\frac{4}{5}$ |
| 3. $\frac{7}{10}$ | 4. $\frac{9}{10}$ |

47. ถ้า $\frac{\sin^2 3A}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 3A}{\cos^2 A} = 2$ แล้ว $\cos 2A$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\frac{1}{4}$ | 2. $\frac{1}{2}$ |
| 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 4. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

48. ถ้า $\tan(\arccos x) = -\sqrt{3}$ แล้วค่าของ $x \sin(2 \arccos x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | 2. $-\frac{1}{2}$ |
| 3. $\frac{1}{2}$ | 4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |

49. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $\cot A = \frac{12}{5}$ แล้ว $10 \operatorname{cosec} A + 12 \sec A$ มีค่าเท่าใด

50. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{3}{5}$ แล้ว $\cos(B - A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

The Expert

Advanced Mathematics (Trigonometry Function)

เฉลยแบบทดสอบท้ายบท เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ข้อที่	คำตอบ	ข้อที่	คำตอบ	ข้อที่	คำตอบ
1	4	21	1	41	1.28
2	3	22	3	42	4
3	4	23	3.00	43	8.80
4	2	24	2	44	4
5	4	25	1	45	0.75
6	3	26	2	46	4
7	4	27	4	47	1
8	3	28	4	48	4
9	4	29	2	49	39.00
10	2	30	1	50	0.80
11	3.00	31	1		
12	1	32	3		
13	4	33	1		
14	3.00	34	4		
15	2	35	0.50		
16	4	36	4		
17	3	37	0.60		
18	1	38	4		
19	2	39	2.25		
20	1	40	1		